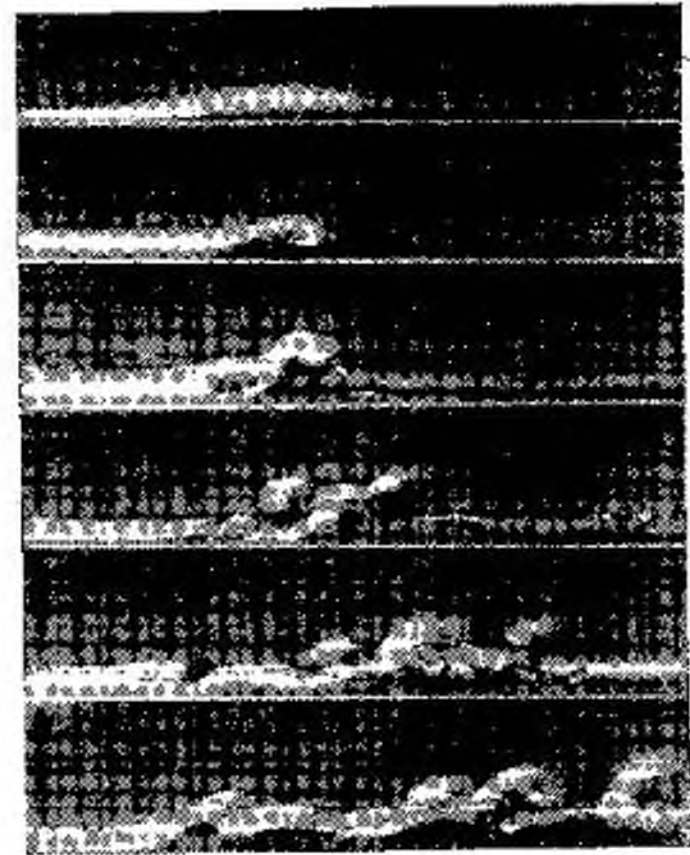


Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что режим движения жидкости зависит от значения числа Re .

Для каждой конкретной установки существует некоторый диапазон значений числа Re , которые можно рассматривать как критические значения — $Re_{кр}$, при которых и происходит смена режимов движения.



Фиг. 7-2. Развитие турбулентности в потоке.

Необходимо иметь в виду также и то, что переход ламинарного движения к турбулентному удается задержать до создания весьма больших значений Re^* , в то время как восстановление ламинарного движения при переходе к нему от турбулентного осуществляется при относительно малых значениях Re . В практике гидравлических расчетов именно это малое значение Re и принимают за $Re_{кр}$. Например, при движении в круглых трубах за нижнюю границу $Re_{кр}$ вычисляемую через среднюю скорость v , принимают:

$$Re_{кр} = 2320. \quad (7-3)$$

* В опытах в трубах путем устранения источников возмущения удавалось довести значение чисел Re до $Re = \frac{vd}{\nu} = 100\,000$. В этом выражении v — средняя скорость (см. сноски на стр. 100). Однако ламинарное движение при больших значениях Re очень неустойчиво; иногда достаточно небольшого возмущения для того, чтобы обратить ламинарное движение в турбулентное.

На значение критического числа $Re_{кр}$ огромное влияние оказывают различные возмущения, возникающие в потоке вследствие шероховатости внутренних поверхностей трубопроводов, различных запорных устройств и другой трубопроводной арматуры. Существенное влияние на $Re_{кр}$ оказывают и возмущения, создающиеся у источника питания (в насосе и т. п.), неблагоприятные условия при входе жидкости в трубу (сужения потока и т. п.).

В коротких трубопроводах на $Re_{кр}$ оказывают влияние также и условия на выходе, часто вносящие возмущения в поток.

В связи с этим будем считать движение ламинарным, если

$$Re = \frac{vd}{\nu} < 2320,$$

турбулентным, если

$$Re > 2320.$$

Возмущения, возникающие вследствие посторонних причин в ламинарном потоке (при $Re < Re_{кр}$), если трубопровод достаточно длинный, затухают. В ламинарном потоке, но при больших значениях $Re > Re_{кр}$ или в турбулентном движении эти возмущения уже не затухают, а, наоборот, продолжают развиваться в направлении течения. На фиг. 7-2 показано развитие турбулентности в потоке. Начальное возмущение (верхний снимок) было произведено кратковременным отсасыванием жидкости через отверстие в стенке. Последующие снимки были произведены при помощи кинокамеры, перемещавшейся параллельно потоку со скоростью движения возмущения. В дальнейшем закономерности ламинарного и турбулентного потоков будут рассмотрены подробнее.

Задача 7-1. Определить режим движения воды в трубе при следующих данных: 1) расход воды $Q = 5$ л/сек; 2) диаметр трубы $d = 0,05$ м; 3) температура воды $t = 5^\circ \text{C}$.

Решение. Для определения режима движения необходимо вычислить число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu}$$

Определим для этого сначала

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,005}{3,14 \cdot 0,0025} = 2,55 \text{ м/сек},$$

а затем

$$\nu = \frac{0,01775}{1 + 0,0337t + 0,000231t^2} = \frac{0,01775}{1,1740} = 0,0151 \text{ см}^2/\text{сек}$$

зная v и ν , находим:

$$Re = \frac{255 \cdot 5}{0,0151} = 84\,437.$$

Так как число Рейнольдса оказалось больше критического значения $Re > 2320$, то движение в трубе будет турбулентным.

Задача 7-2. Определить режим движения нефти в трубе при следующих данных: 1) расход нефти $G = 10$ кг/сек; 2) объемный вес $\gamma = 850$ кг/м³; 3) диаметр трубы $d = 0,1$ м; 4) вязкость нефти в условных градусах $E^\circ = 15^\circ$.

Решение. Так же как и в предыдущей задаче, для определения режима движения необходимо вычислить число Рейнольдса $Re = \frac{vd}{\nu}$. Для определения v необходимо знать объемный расход нефти

$$Q = \frac{G}{\gamma} = \frac{10}{850} = 0,0118 \text{ м}^3/\text{сек},$$

откуда

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{0,0118 \cdot 4}{\pi 0,01} = 1,50 \text{ м/сек.}$$

Для определения кинематического коэффициента вязкости применим формулу (2-28), принимая $1 - \frac{1}{Ez} \approx 1$;

$$\nu = 0,01 \cdot E \cdot 7,6 = 0,01 \cdot 15 \cdot 7,6 = 1,140 \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Таким образом,

$$Re = \frac{150 \cdot 10}{1,140} = 1315.$$

Так как число Рейнольдса оказалось меньше критического значения $Re < 2320$, то, следовательно, движение в трубе будет ламинарным.

7-2. Движение установившееся и неустановившееся. Понятие о местной осредненной скорости

В зависимости от условий, вызывающих движение жидкости, это движение может быть или установившимся (стационарным), или неустановившимся (нестационарным).

Примером установившегося движения может служить ламинарный поток в трубопроводе при условии, что уровень жидкости в резервуаре (фиг. 7-1) не изменяется.

Установившийся поток характеризуется постоянством поля скоростей в пространстве, занятом потоком, хотя движение самой частицы может быть и неравномерным.

Движение в трубопроводе станет неустановившимся, если уровень жидкости в резервуаре будет меняться. Таким образом, неустановившееся движение характеризуется в пространстве, занятом потоком, меняющимся во времени полем скоростей. Дадим общее определение понятиям установившегося и неустановившегося движения.

Рассмотрим некоторый поток (фиг. 7-3). Выберем в пространстве, занимаемом потоком, произвольную точку $A(x_1, y_1, z_1)$. Если скорости и давления частиц, проходящих в разное время через точку пространства A , будут различны, такое движение будем называть неустановившимся.

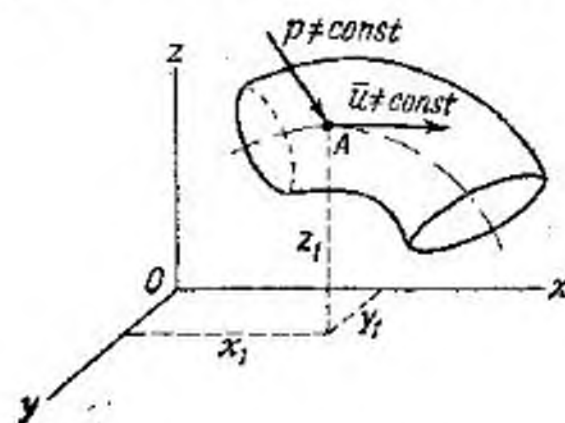
Скорости и давления, изменяясь во времени в данной точке, изменяются также при перемещении частицы жидкости из одного положения в другое.

Аналитически это выразится в том, что в неустановившемся движении скорости и гидродинамические давления являются функциями координат точек x, y и z пространства, занимаемого потоком, и времени t :

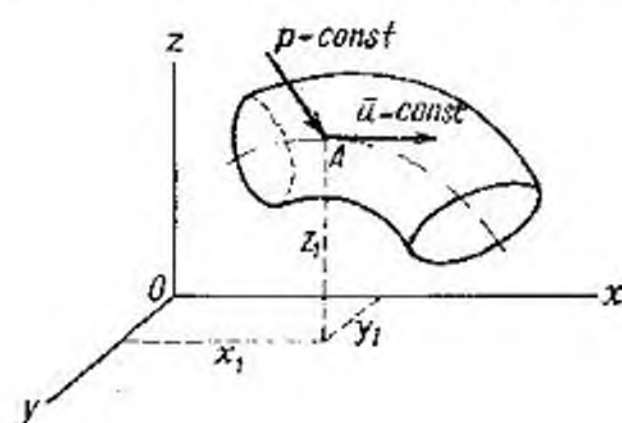
$$u = u(x, y, z, t); \quad (7-4)$$

$$p = p(x, y, z, t). \quad (7-5)$$

В установившемся движении в отличие от неустановившегося движения скорости и гидродинамические давления в данной точке пространства постоянны, т. е. не изменяются во времени ни по величине, ни по направлению, поэтому частицы движущейся



Фиг. 7-3. В каждой точке пространства скорости и давления изменяются.



Фиг. 7-4. В каждой точке пространства скорости и давления постоянны.

жидкости, попадая в разное время в точку пространства A , будут иметь одинаковые скорости и гидродинамические давления (фиг. 7-4).

Аналитически это выразится в том, что в установившемся движении скорости и гидродинамические давления являются функциями только x, y и z , т. е.

$$u = u(x, y, z); \quad (7-6)$$

$$p = p(x, y, z). \quad (7-7)$$

Переменные x, y, z и t называются переменными Эйлера, а метод исследования гидродинамических величин, выражаемых в виде функциональных зависимостей от переменных Эйлера, называется методом Эйлера¹.

Скорости и гидродинамические давления, будучи постоянными в данной точке пространства, изменяются при перемещении частицы жидкости из одного положения в другое.

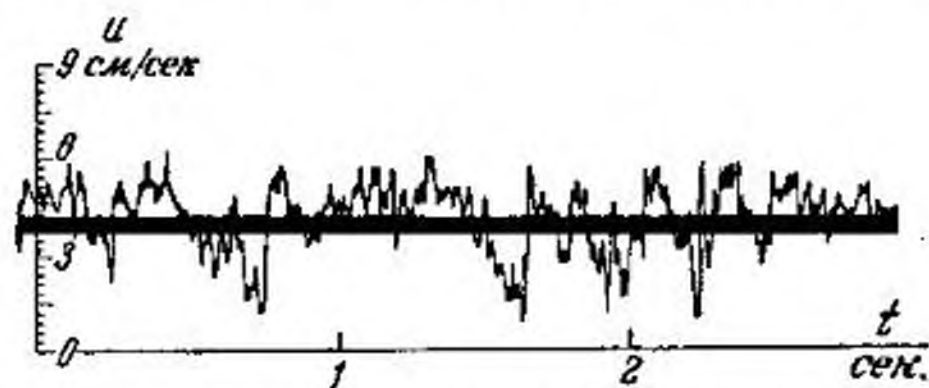
Постоянство поля скоростей в установившемся потоке можно математически выразить следующим образом:

$$\frac{du_x}{dt} = 0; \quad \frac{du_y}{dt} = 0; \quad \frac{du_z}{dt} = 0. \quad (7-8)$$

¹ Изучение потока жидкости в некоторых случаях осуществляется и иным методом, также предложенным Л. Эйлером, но развитым главным образом Жозефом-Луи Лагранжем (1736 — 1813 гг.) и называемым поэтому методом Лагранжа. В методе Лагранжа составляются уравнения движения для каждой частицы движущейся жидкости. Координаты движущихся частиц задаются как функции переменных Лагранжа: времени t и координат их начального положения a, b, c .

Экспериментальные исследования показывают, что турбулентное движение всегда является движением только неустановившимся.

На фиг. 7-5 показана диаграмма изменения осевой составляющей скорости в некоторой точке турбулентного потока. Жидкость поступала в трубопровод из резервуара, уровень жидкости в котором поддерживался постоянным. Из диаграммы следует, что



Фиг. 7-5. Диаграмма изменения осевой скорости в турбулентном потоке.

поле скоростей в турбулентном потоке изменяется. Несмотря на кажущуюся беспорядочность изменения скоростей в точке, скорости в ней изменяются около некоторого среднего во времени значения. Такая изменчивость называется пульсацией скоростей. Пульсация поля скоростей является основной характеристикой турбулентного потока.

Существует некоторый отрезок времени — период осреднения T , за который осредненная во времени скорость в точке может считаться постоянной. Эта скорость определяется по формуле

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (7-9)$$

и называется осредненной местной скоростью. Здесь u — истинная скорость, а t — время.

Время осреднения T зависит от характера движения и размеров потока. Например, для больших открытых русел это время T может составить 5—10 мин. и более.

Установившимся турбулентным движением называется осредненное установившееся движение, поле осредненных скоростей которого постоянно. Примером установившегося турбулентного движения может служить турбулентное движение воды во всасывающей или напорной трубе центробежного насоса при постоянном числе его оборотов или турбулентное движение в трубопроводе, присоединенном к резервуару, уровень жидкости в котором поддерживается постоянным.

При изучении неустановившихся осредненных турбулентных потоков в рассмотрение вводятся местные осредненные скорости, уже не являющиеся постоянными. В этом случае интервал времени осреднения должен быть таким, при котором осредненную переменную скорость можно было бы считать постоянной за время осреднения.

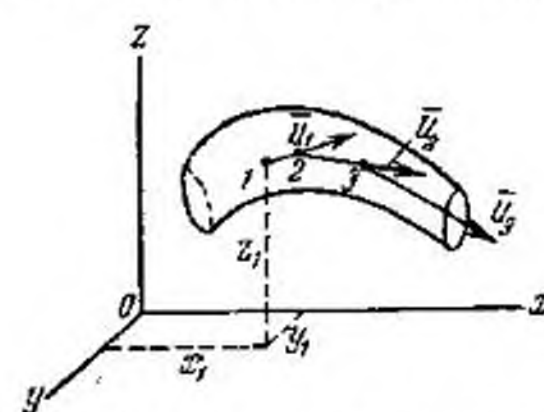
Примером такого неустановившегося движения может служить случай движения жидкости во всасывающей или нагнетательной трубе поршневого насоса. В них вследствие переменной скорости движения поршня жидкость находится в состоянии неустановившегося движения. Обычно насосы снабжаются специальными устройствами, воздушными колпаками, которые содействуют тому, что в трубопроводах движение приближается к установившемуся.

Другим примером неустановившегося турбулентного движения может служить турбулентное движение жидкости в трубопроводе, присоединенном к резервуару, уровень жидкости в котором понижается (например, при опорожнении).

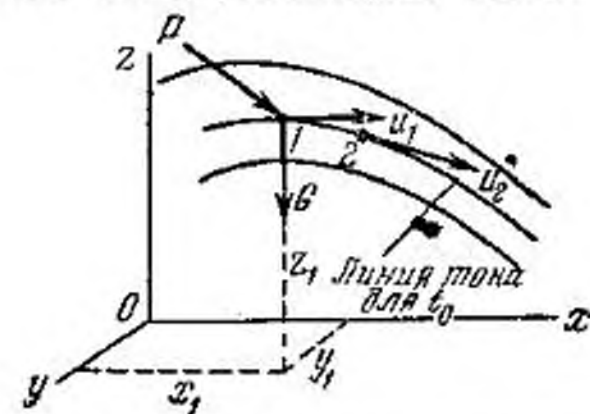
7-3. Линия тока

Важное значение для понимания дальнейшего имеет линия тока.

Линией тока называется линия в потоке, касательные к которой в каждой точке совпадают с направлением векторов скорости в точке. Чтобы представить линию тока, рассмотрим семей-



Фиг. 7-6. Ломаная линия в пределе обращается в линию тока.



Фиг. 7-7. Скорость направлена по касательной к линии тока.

ство движущихся частиц жидкости, расположенных вдоль потока на бесконечно малых расстояниях друг от друга, причем таким образом (фиг. 7-6), чтобы каждая последующая частица располагалась на направлении вектора скорости предыдущей частицы. В пределе при бесконечно большом количестве частиц, бесконечно близких друг к другу, они расположатся на линии, которая и будет линией тока, соответствующей моменту t_0 (фиг. 7-7).

Для установившегося движения линия тока всегда совпадает с траекторией частиц, на ней расположенных. Для неустановив-

шегося движения линия тока в общем случае не является траекторией частиц, на ней расположенных, так как частицы на линиях тока находятся в общем случае лишь одно мгновение. В момент, следующий за t_0 , эти частицы будут принадлежать уже другим линиям тока.

Необходимо отметить, что в установившемся турбулентном движении линий тока как линий, не изменяющихся во времени, не существует. Здесь можно говорить только о линиях тока, соответствующих полю осредненных скоростей.

Имея в виду, что касательная к линии тока и вектор скорости образуют с осями координат одни и те же углы α , β и γ , можно составить дифференциальное уравнение линий тока, воспользовавшись зависимостями

$$\begin{aligned} dx &= dl \cdot \cos \alpha; & dy &= dl \cdot \cos \beta; & dz &= dl \cdot \cos \gamma; \\ u_x &= u \cdot \cos \alpha; & u_y &= u \cdot \cos \beta; & u_z &= u \cdot \cos \gamma, \end{aligned}$$

где dl — дифференциал дуги линии тока; а dx , dy и dz — его проекции.

Отсюда

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (7-10)$$

Для неустановившегося движения в выражения u_x , u_y и u_z войдет и время, которое следует рассматривать как параметр.

Для плоского движения, например в плоскости xy (угол $\gamma = 90^\circ$), дифференциальное уравнение линий тока примет вид:

$$u_x \cdot dy - u_y \cdot dx = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет функция $\phi(x, y, t)$, называемая функцией тока, определяющая проекции скорости частиц по формуле

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (7-11)$$

Каждой линии тока соответствует постоянное значение функции тока; уравнение линий тока может быть представлено в виде:

$$\phi(x, y, t) = C. \quad (7-12)$$

Покажем это. Для этого подставим значения u_x и u_y по (7-11) в дифференциальное уравнение. При этом получим:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dx = 0,$$

или

$$d\phi = 0,$$

что и подтверждает сказанное.

7-4. Движение жидкого элемента. Вихревое и безвихревое движение

В § 7-1 было дано общее представление о перемещении отдельных частиц. Здесь рассмотрим более подробно движение каждой частицы в отдельности.

В отличие от твердого тела, движение которого в теоретической механике в общем случае можно разложить на поступательное движение со скоростью u_0 произвольно выбранной точки (полюса) и на вращательное движение с угловой скоростью Ω вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку, движение жидкого элемента в общем случае можно разложить на три движения. Каждый бесконечно малый элемент жидкости, кроме поступательного и вращательного движения, находится еще и в состоянии деформационного движения.

При таком разложении движения скорость любой точки жидкой частицы можно рассматривать как геометрическую сумму трех скоростей:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{u}_{sp} + \bar{u}_{деф}, \quad (7-13)$$

где \bar{u}_0 — скорость поступательного движения;

\bar{u}_{sp} — скорость вращательного движения;

$\bar{u}_{деф}$ — скорость деформации.

Скорость вращательного движения определяется по известным из теоретической механики формулам. Напомним формулы, определяющие проекции скорости вращательного движения:

$$\left. \begin{aligned} (u_{sp})_x &= \Omega_y \cdot dz - \Omega_z \cdot dy; \\ (u_{sp})_y &= \Omega_z \cdot dx - \Omega_x \cdot dz; \\ (u_{sp})_z &= \Omega_x \cdot dy - \Omega_y \cdot dx, \end{aligned} \right\} \quad (7-14)$$

где dx , dy , dz — координаты точки относительно полюса; Ω_x , Ω_y , Ω_z — проекции угловой скорости.

Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \Omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \Omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7-15)$$

Для определения проекции скорости деформации надо из проекции абсолютной скорости частицы вычесть проекции скоростей переносного и вращательного движений. При этом, учитывая, что

$$u_x = u_{0x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot dz,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} u_{деф\ x} &= u_x - u_{0x} - u_{вР\ x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz; \\ u_{деф\ y} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) dz; \\ u_{деф\ z} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dy. \end{aligned} \right\} (7-16)$$

Движение жидкости с вращением ее частиц называется *вихревым*. Удвоенное значение вектора угловой скорости назовем *вихрем скорости*.

Вихревое движение возникает при обтекании быков моста, за кораблем. Движения в трубопроводах также являются вихревыми. Примером вихревых движений являются циклоны и антициклоны, а также смерчи. Образование вихревых движений обусловливается различными причинами. Большую роль, особенно в трубопроводах, играет вязкость жидкостей (§ 2-4).

Наряду с вихревыми движениями в гидродинамике рассматриваются движения безвихревые, в которых вихрь скорости равен нулю.

Так как при безвихревом движении

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0,$$

то для такого движения

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (7-17)$$

Безвихревое движение называется также *потенциальным движением*, потому что этому движению удовлетворяет функция $\varphi(x, y, z, t)$, называемая *потенциалом скорости*, определяющая вектор скорости и его проекции по формулам:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi, \quad (7-18)$$

или

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (7-19)$$

Легко убедиться в том, что соотношения (7-19) удовлетворяют условиям равенства нулю вихря, т. е. уравнениям (7-17). Проверив одно из них, например первое, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \cdot \partial x} \text{ и т. п.}$$

Во многих практически важных случаях действительные движения дают картину, близкую к безвихревому движению. По-

тенциальный поток положен в основу расчета многих типов гидравлических машин (насосов, турбин). При обтекании потоком жидкости тела вблизи него в области так называемого пограничного слоя движение оказывается вихревым, но на некотором от него расстоянии (вне пограничного слоя), как указывал Н. Е. Жуковский, движение можно рассматривать как потенциальное.

Глава восьмая

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

8-1. Гидравлическая модель потока

Основным элементом гидравлической модели потока является элементарная струйка. Для ее определения сперва введем понятие *трубки тока*. Для этого представим себе бесконечно малый замкнутый контур (фиг. 8-1), каждая точка которого принадлежит различным линиям тока. В этом случае линии тока, проходящие через точки такого контура, образуют трубчатую поверхность, называемую *трубкой тока*.

Жидкость, заполняющая трубку тока, образует элементарную струйку.

В неустановившемся потоке форма элементарных струек непрерывно изменяется. В установившемся потоке элементарные струйки, так же как и линии тока, сохраняют постоянную форму.

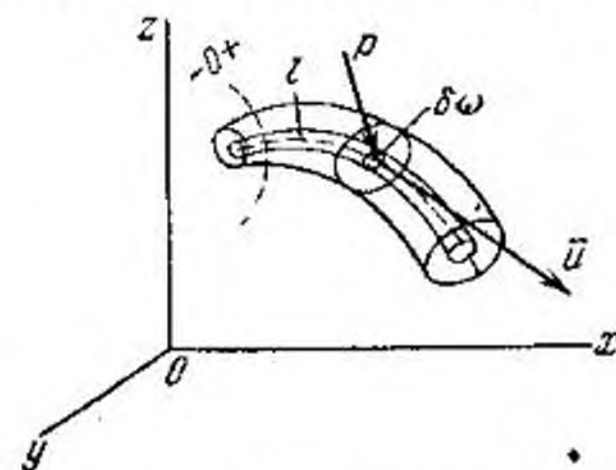
Поток в целом можно рассматривать как совокупность элементарных струек (для установившегося движения не изменяющихся во времени).

Сечение струйки, нормальное к ее линиям тока, назовем *живым сечением струйки*; площадь его обозначается через $\delta\omega$. Положение движущихся частиц можно определить криволинейными координатами, а именно расстоянием частичек от некоторого начала отсчета, взятого на оси элементарной струйки (фиг. 8-1), а скорости и давления в точках пространства вместо формул (7-4) — (7-7) выразить в виде:

для неустановившегося движения

$$u = u(l, t); \quad (8-1)$$

$$p = p(l, t); \quad (8-2)$$



Фиг. 8-1. Схема элементарной струйки.

для установившегося движения

$$u = u(l); \quad (8-3)$$

$$p = p(l). \quad (8-4)$$

Элементарным расходом потока называется количество жидкости, протекающее через данное живое сечение элементарной струйки в единицу времени. Расход вычисляется в единицах объема, массы и веса. Вследствие того, что площадь сечения струйки бесконечно мала, можно считать, что все частички этого сечения имеют одинаковую скорость u . При этом предположении через живое сечение струйки в единицу времени протекает количество жидкости (например, кубических метров в секунду), называемое элементарным объемным расходом δQ [м³/сек] и определяемое по формуле

$$\delta Q = u \delta \omega \text{ [м}^3\text{/сек]}. \quad (8-5)$$

В формуле (8-5) u измеряется в м/сек, а $\delta \omega$ в м². Элементарный массовый расход вычисляется по формуле

$$\delta M = \rho u \delta \omega \text{ [кг} \cdot \text{сек/м]}, \quad (8-6)$$

элементарный весовой расход вычисляется по формуле

$$\delta G = \gamma u \delta \omega \text{ [кг/сек]}. \quad (8-7)$$

8-2. Уравнение непрерывности

Одним из важнейших следствий принципа непрерывности является так называемое уравнение непрерывности потока — уравнение, выражающее зависимости между скоростями в потоке, в котором гидродинамические величины непрерывны. Для капельной жидкости уравнение непрерывности выражает условие, при котором в потоке отсутствуют разрывы струй, и поэтому называется уравнением неразрывности¹.

Выведем уравнение непрерывности для элементарной струйки (фиг. 8-2). Рассмотрим отсек струйки длиной δl , ограниченный сечениями $\delta \omega_1$ слева и $\delta \omega_2$ справа. Обозначим через $\rho \delta Q$ массовый расход жидкости через сечение струйки $\delta \omega_1$. Вследствие принципа непрерывности через сечение $\delta \omega_2$ протекает расход

$$(\rho \delta Q)_2 = (\rho \delta Q)_1 + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta Q) \delta l.$$

Ввиду того, что в общем случае расходы не равны друг другу в рассматриваемом объеме элементарной струйки, будет

¹ Нарушение непрерывности может быть вызвано кавитационными явлениями (см. гл. 2 и 17).

каждую секунду (единицу времени) происходить приращение массы, которое определим по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta M) = (\rho \delta Q)_2 - (\rho \delta Q)_1 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta Q) \delta l.$$

Приращение массы может произойти на основании того же принципа непрерывности только за счет изменения плотности жидкости ρ и объема отсека струйки.

Масса жидкости в рассматриваемом объеме равна:

$$\delta M = \rho \delta \omega \delta l,$$

где $\delta \omega$ — некоторое промежуточное значение живого сечения рассматриваемой элементарной струйки.

Секундное приращение массы может быть вычислено по формуле

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta M) = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta \omega) \delta l.$$

Приравняв оба значения $\frac{\partial}{\partial t} (\delta M)$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta \omega) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta Q) = 0. \quad (8-8)$$

Имея в виду, что

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(l, t), \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt}, \\ \delta Q &= u \delta \omega, \\ u &= \frac{dl}{dt}, \end{aligned}$$

уравнение (8-8) можно представить в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\delta \omega} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (\delta \omega) + \frac{\partial}{\partial t} (\delta Q) \right] = 0. \quad (8-9)$$

Уравнения (8-8) и (8-9) являются уравнениями непрерывности. Исследуем полученные уравнения.

Рассмотрим установившееся движение жидкости (капельной или газа); для установившегося движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta \omega) = 0.$$

Поэтому из уравнения (8-8) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta Q) = 0,$$



Фиг. 8-2. Схема элементарной струйки в неразрывном потоке.

откуда

$$\rho \delta Q = \text{idem}, \quad (8-10)$$

или

$$\rho_1 u_1 \delta \omega_1 = \rho_2 u_2 \delta \omega_2, \quad (8-11)$$

т. е. в установившемся движении капельной жидкости и газа массовый расход $\rho \delta Q = \rho u \delta \omega$ по длине элементарной струйки имеет одно и то же значение. Для капельной жидкости $\rho = \text{const}$, поэтому

$$\delta Q = \text{idem}; \quad (8-12)$$

$$u_1 \delta \omega_1 = u_2 \delta \omega_2. \quad (8-13)$$

Из формул следует, что скорости в различных сечениях элементарной струйки капельной жидкости обратно пропорциональны площадям живых сечений

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\delta \omega_2}{\delta \omega_1}, \quad (8-14)$$

а в элементарной струйке газа обратно пропорциональны произведениям $\rho \delta \omega$, т. е.

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2 \delta \omega_2}{\rho_1 \delta \omega_1}. \quad (8-15)$$

Рассмотрим неустановившееся движение только капельной жидкости ($\rho = \text{const}$). В этом случае

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

и из формулы (8-9) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta \omega) + \frac{\partial}{\partial t} (\delta Q) = 0. \quad (8-16)$$

Для многих гидродинамических задач важным является применение принципа непрерывности для каждой точки потока.

Для вывода этого уравнения рассмотрим внутри пространства, занимаемого потоком, элементарный неподвижный прямоугольный параллелепипед с ребрами δx , δy и δz , через который протекает жидкость (фиг. 8-3).

Обозначим скорость и ее проекции, а также плотность в центре параллелепипеда через u , u_x , u_y , u_z и ρ . В параллелепипеде через его центр проведем плоскость, перпендикулярную к оси x . Массовый расход жидкости через эту плоскость δq_x будет равен:

$$\delta q_x = \rho u_x \delta y \delta z.$$

Массовый расход жидкости δq_1 , втекающей в параллелепипед через левую грань площадью $\delta \omega_x$, согласно принципу непрерывности будет равен:

$$\delta q_{x_1} = \left[\rho u_x - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) \cdot \frac{1}{2} \delta x \right] \delta y \delta z,$$

а массовый расход δq_{x_2} жидкости, вытекающей через правую грань, будет:

$$\delta q_{x_2} = \left[\rho u_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) \cdot \frac{1}{2} \delta x \right] \delta y \delta z.$$

В общем случае расходы δq_{x_1} и δq_{x_2} не равны друг другу. Вследствие этого секундное приращение массы жидкости в параллелепипеде, обусловленное неодинаковостью скоростей u_x и плотностей ρ на рассматриваемых площадках, будет равно:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta M)_x = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) \delta x \delta y \delta z.$$

Аналогичные выражения можно получить и для приращения массы параллелепипеда, обусловленного изменениями скоростей и плотностей на других гранях.

Общее секундное приращение массы параллелепипеда будет равно:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta M) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right] \delta x \delta y \delta z. \quad (8-17)$$

Но изменение массы в полностью заполненном и неизменяемом объеме $\delta x \delta y \delta z$ может произойти только за счет изменения плотности жидкости в этом объеме. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta M) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z. \quad (8-18)$$

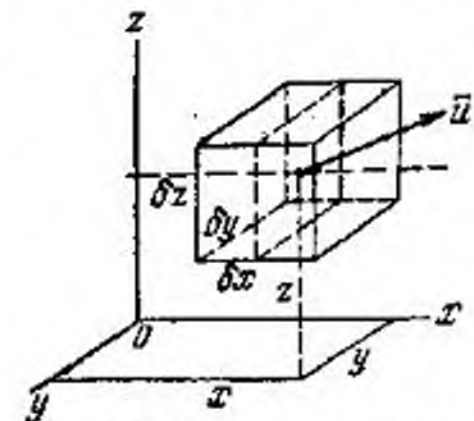
Приравнявая значения $\frac{\partial}{\partial t} (\delta M)$, найдем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0, \quad (8-19)$$

или, имея в виду, что в общем случае $\rho = \rho(x, y, z, t)$, получим:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (8-20)$$

Уравнению непрерывности можно придать следующий вид:



Фиг. 8-3. В неразрывном потоке изменение массы в объеме параллелепипеда в общем случае происходит непрерывно.

1. Для капельной жидкости ($\frac{dp}{dt} = 0$) всегда

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (8-21)$$

Это равносильно тому, что при любом движении капельной (неоднородной и однородной) жидкости, удовлетворяющей принципу непрерывности, объемы жидкости, вытекающей в рассматриваемый неподвижный объем и вытекающей из него, равны. Это уравнение выражает также и условие неразрывности потока.

2. Для установившегося движения газа ($\frac{\partial p}{\partial t} = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0. \quad (8-22)$$

Из последнего выражения в связи с (8-17) следует, что в установившемся движении газа изменение массы в рассматриваемом неподвижном объеме не происходит.

Это значит, что в объем втекает и из объема вытекает одинаковое количество массы жидкости.

8-3. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Л. Эйлера)

При выводе дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости пренебрегают силами трения. Вследствие этого основное свойство гидростатического давления — независимость его от направления — может быть распространено и на гидродинамическое давление, т. е. может быть принято: $p_x = p_y = p_z$.

Рассмотрим сначала абсолютное движение, т. е. движение по отношению к земле, причем движение самой земли не будем учитывать.

В потоке жидкости выделим частицу в форме прямоугольного параллелепипеда (фиг. 8-4) с ребрами длиной δx , δy и δz . В рассматриваемом случае на частичку действует массовая сила — только сила тяжести δG — и, кроме того, шесть поверхностных сил — сил давления δP_i на соответствующие грани. Рассматриваемая частица движется в общем случае с ускорением $\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{dt}$, где $\frac{d\bar{u}}{dt}$ — производная от вектора скорости \bar{u} — центра частицы по времени. Согласно закону движения центра инерции геометрическая сумма действующих сил должна равняться произведению массы частички δM на ускорение ее центра $\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{dt}$.

Таким образом, уравнение движения может быть записано в виде¹:

$$\sum_{i=1}^6 \delta \bar{P}_i + \delta \bar{G} = \delta M \cdot \frac{d\bar{u}}{dt}. \quad (8-23)$$

Для получения уравнения Эйлера преобразуем уравнение (8-23). Для этого сперва спроектируем его на какую-либо ось, например на ось x .

Получим:

$$\delta G_x + \delta P_1 - \delta P_2 = \delta M \frac{du_x}{dt}.$$

Проекция остальных сил давления на ось x равны нулю, так как силы перпендикулярны к оси проекции.

Проекция силы веса на ось x

$$\delta G_x = X \rho \delta x \delta y \delta z,$$

где X — проекция на ось x ускорения только силы тяжести g .

Для определения разности сил $\delta P_1 - \delta P_2$ обозначим гидродинамическое давление в центре параллелепипеда через p . Поскольку силы трения приняты равными нулю,

$$p = p_x = p_y = p_z.$$

В общем случае гидродинамическое давление p является функцией координат и времени, т. е.

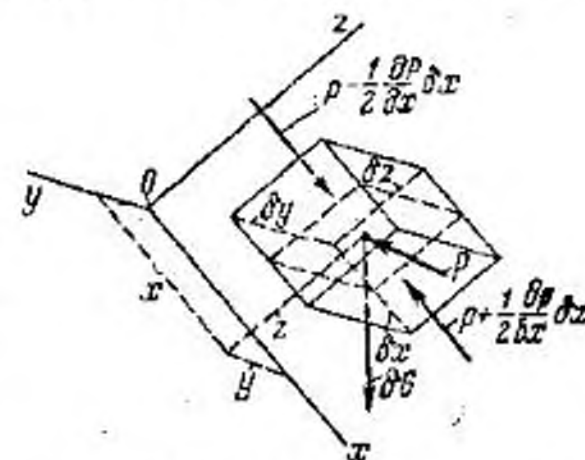
$$p = p(x, y, z, t).$$

Давление p_1 на площадке левой грани будет равно:

$$p_1 = p - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \delta x$$

и на площадке правой грани

$$p_2 = p + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \delta x,$$



Фиг. 8-4. Частичная схема сил, действующих на элементарный параллелепипед в потоке.

¹ Для реальной жидкости уравнение должно было бы быть записано в виде:

$$\sum_{i=1}^6 \delta \bar{P}_i + \sum_{i=1}^6 \delta \bar{T}_i + \delta \bar{G} = \delta M \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad (8-23')$$

где δT_i — силы трения, действующие по граням частицы.

поэтому¹

$$\delta P_1 - \delta P_2 = (p_1 - p_2) \delta y \delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z.$$

Найдем проекцию ускорения a_x . Для этого сперва вычислим:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz,$$

а затем

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z, \quad (8-24)$$

поскольку $\frac{dx}{dt} = u_x$, $\frac{dy}{dt} = u_y$, $\frac{dz}{dt} = u_z$.

Подставляя необходимые значения в уравнение проекций сил, после сокращения получим:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

и аналогично для других осей

$$\begin{aligned} Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (8-25)$$

где X , Y и Z — проекции на оси x , y и z ускорения только силы тяжести g .

Полученные три уравнения и являются дифференциальными уравнениями движения идеальной жидкости — уравнениями Эйлера. Эти уравнения были получены им в 1755 г. Они справедливы как для капельной жидкости, так и для газа.

Обратим внимание на то, что полученные выше дифференциальные уравнения движения оказываются недостаточными для решения гидродинамических задач, поскольку число неизвестных (p , ρ , u_x , u_y и u_z) больше числа уравнений.

Четвертым уравнением, замыкающим систему уравнений для капельной жидкости ($\rho = \text{const}$), будет уравнение непрерывности (8-21).

Для исследования движения газовых потоков ($\rho \neq \text{const}$) необходимо пополнить систему пятым уравнением, каковым является уравнение состояния Клапейрона — Менделеева (см. гл. 2), а уравнение непрерывности брать в форме (8-20).

¹ См. сноску на стр. 33.

Полученные выше уравнения Эйлера для абсолютного движения можно представить в векторной форме, а именно:

$$\bar{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) = \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad (8-26)$$

где \bar{g} — вектор ускорения силы тяжести; $\text{grad}(p)$ — градиент гидродинамического давления (см. сноску на стр. 38).

Справедливость этой формы уравнения легко проверить, спроектировав его на оси координат, после чего получим уравнения Эйлера в координатной форме.

Уравнения Эйлера могут быть также использованы и для относительного движения. Однако в этом случае X , Y и Z уже будут являться алгебраической суммой ускорений: силы тяжести — \bar{g} , силы инерции переносного движения — $J_{пер}$ и силы инерции Кориолиса — J_k .

Вместо абсолютной скорости u в уравнение надо ввести относительную скорость \bar{w} . Вместо (8-26) получим:

$$(\bar{g} + \bar{J}_{пер} + \bar{J}_k) - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) = \frac{d\bar{w}}{dt}. \quad (8-27)$$

8-4. Дифференциальные уравнения Л. Эйлера в естественной форме

Уравнениями Эйлера в естественной форме называются дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости, выраженные в форме проекций на оси натурального триедра (на касательную и главную нормаль к линии тока) (фиг. 8-5). Обозначая направление касательной через l и принимая во внимание, что проекция градиента давления на направление l равна:

$$[\text{grad}(p)]_l = \frac{\partial p}{\partial l},$$

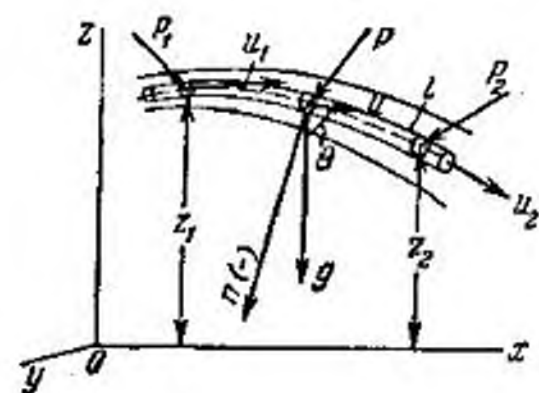
$$\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\right)_l = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial l} u,$$

будем иметь:

$$g_l - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (8-28)$$

Аналогично для проекций на главную нормаль n получим:

$$g_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{u^2}{r}, \quad (8-29)$$



Фиг. 8-5. Положительное направление нормали взято от центра кривизны линии тока.

где проекция ускорения $\frac{du}{dt}$ на главную нормаль равна нормальному ускорению

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_n = -\frac{u^2}{r},$$

а r — радиус кривизны линии тока; положительное направление нормали выбрано в направлении от центра кривизны линии тока.

8-5. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки идеальной каплевой жидкости при неустановившемся и установившемся движении

Уравнение Бернулли является интегралом уравнений Эйлера. Для получения уравнения Бернулли для элементарной струйки каплевой идеальной жидкости в общем случае при неустановившемся движении воспользуемся уравнением (8-28).

В этом уравнении g_t — проекция ускорения силы тяжести на направление касательной к линии тока.

Выберем оси координат, как показано на фиг. 8-5. При таком расположении осей

$$g_t = g \cos \theta = -g \frac{\partial z}{\partial l}.$$

Подставляя в (8-28), найдем:

$$-g \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{u^2}{2} \right).$$

Для каплевой жидкости это уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{du}{dt}, \quad (8-30)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{du}{dt}. \quad (8-31)$$

Это и есть уравнение Бернулли для неустановившегося движения идеальной жидкости, но в дифференциальной форме.

Для установившегося движения $\frac{du}{dt} = 0$. Поэтому для установившегося движения уравнение Бернулли примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0. \quad (8-32)$$

Заметим, что для установившегося движения формула (8-28) после умножения на dl может быть представлена в виде:

$$g_t dl - \frac{1}{\rho} dp = d \left(\frac{u^2}{2} \right). \quad (8-33)$$

Уравнение (8-33) выражает теорему кинетической энергии для установившегося движения частицы идеальной жидкости.

Левая часть определяет элементарную работу сил тяжести и сил давления, отнесенную к единице массы¹, а $d \left(\frac{u^2}{2} \right)$ есть дифференциал (элементарное приращение) кинетической энергии, отнесенный также к единице массы.

Таким образом, в установившемся движении частицы идеальной жидкости дифференциал (элементарное приращение) кинетической энергии единицы массы равен сумме элементарных работ сил тяжести и сил гидродинамического давления.

Для идеальной жидкости важным является тот факт, что вся работа сил, действующих на частицу, затрачивается только и только на изменение ее кинетической энергии.

Уравнения Бернулли в конечной форме могут быть получены после интегрирования уравнений (8-31) и (8-32) вдоль линии тока. Сперва проинтегрируем первое из них от сечения 1 до сечения 2 (фиг. 8-5).

Для этого сначала умножим левую и правую часть на dl , получим:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) \cdot dl = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dl,$$

откуда после интегрирования

$$\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dl.$$

Обозначим через h_n и назовем инерционным напором выражение

$$h_n = \frac{1}{g} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dl. \quad (8-34)$$

Перепишем предыдущую формулу в виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_n. \quad (8-35)$$

¹ Сказанное относительно сил давления может быть доказано подобно тому, как это было сделано в гидростатике [см. уравнение (3-8)].

Для установившегося движения согласно уравнению (8-32)

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{idem}, \quad (8-36)$$

поэтому

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (8-37)$$

В уравнениях (8-36) и (8-37) каждый из трехчленов имеет не только одно и то же значение, но и остается постоянным во времени.

Уравнение (8-35) для неустановившегося движения идеальной жидкости справедливо лишь для любых двух частиц, расположенных на одной и той же линии тока.

Уравнение (8-37) для установившегося движения идеальной жидкости справедливо не только для двух любых частиц, расположенных на одной и той же линии тока, но и для одной и той же частицы в двух ее положениях на траектории.

Таким образом, хотя каждый из членов уравнения z , $\frac{p}{\gamma}$ и $\frac{u^2}{2g}$ вдоль линии тока идеальной жидкости и изменяется, но их сумма в установившемся потоке для данной траектории или линии тока сохраняет одно и то же постоянное значение.

Трехчлен $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$ в отличие от двучлена $z + \frac{p}{\gamma}$, встречающегося в гидростатике, называется гидродинамическим напором и обозначается через $H_{z\partial}$:

$$H_{z\partial} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}. \quad (8-38)$$

Величины z и $\frac{p}{\gamma}$ в уравнении Бернулли имеют те же наименования и тот же смысл, что и в гидростатике (см. § 4-4).

Величина $\frac{u^2}{2g}$ называется скоростным напором. Из теоретической механики известно, что это выражение определяет высоту, на которую поднимается в пустоте материальная частица жидкости, начавшая двигаться с вертикальной скоростью u . Поэтому эта величина называется также скоростной высотой.

В то же время член $\frac{u^2}{2g}$ является мерой удельной кинетической энергии, т. е. кинетической энергии, отнесенной к единице веса.

В самом деле, частица, имеющая массу M и скорость u , обладает кинетической энергией $K = \frac{Mu^2}{2}$. Вес этой частицы $G = Mg$.

Удельная кинетическая энергия, т. е. энергия, отнесенная к единице веса, будет равна:

$$K_{уд} = \frac{K}{Mg} = \frac{u^2}{2g}.$$

Таким образом, гидродинамический напор $H_{z\partial}$ равен полной механической удельной энергии движущейся частицы жидкости. Из уравнений (8-36) — (8-37) следует, что в установившемся движении идеальной жидкости все частицы, расположенные на одной и той же линии тока, обладают одинаковой полной удельной энергией. То же уравнение может быть сформулировано и так: в установившемся движении идеальной жидкости полная удельная энергия частицы жидкости сохраняет постоянное значение¹.

Если ось элементарной струйки, которую можно рассматривать как линию тока, представляет пространственную кривую, а сечение элементарной струйки по ее длине изменяется, то отдельные составляющие полной удельной энергии соответственно изменяются. В этом случае установившегося движения происходит лишь преобразование одного вида энергии в другой, но без изменения ее суммы. Например, увеличение кинетической энергии вызывает такое же по величине уменьшение потенциальной энергии и наоборот.

В неустановившемся потоке согласно (8-35) частицы, расположенные в различных сечениях элементарной струйки, обладают неодинаковой энергией. Разность энергий двух частиц равна инерционному напору. При этом в зависимости от знака инерционного напора полная удельная энергия по длине элементарной струйки в направлении движения может или убывать, если инерционный напор положительный, или возрастать, если инерционный напор отрицательный.

Заметим, что численное значение инерционного напора зависит от изменения скоростей скоростного поля (от $\frac{\partial u}{\partial t}$), а также и от расстояния между рассматриваемыми сечениями. Знак инерционного напора зависит только от закона изменения скорости.

Инерционный напор оказывает влияние на изменение энергии потока по его длине и поэтому может рассматриваться как источ-

¹ Отметим, что величина полной удельной энергии частиц, принадлежащих различным элементарным струйкам, в общем случае будет неодинакова.

ник дополнительной энергии при $\frac{du}{dt} < 0$ и как своеобразное сопротивление при $\frac{du}{dt} > 0$. Особенно велико влияние инерционного напора при больших значениях $\frac{du}{dt}$, что, например, имеет место при гидравлическом ударе.

8-6. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки реальной капельной жидкости

В отличие от идеальной жидкости, в которой работа сил, действующих на жидкость, полностью идет на изменение ее кинетической энергии, благодаря чему в потоке происходит только преобразование кинетической энергии в потенциальную или наоборот, в реальной жидкости часть работы сил, действующих на жидкость, затрачивается на преобразование механической энергии в тепловую.

Если преобразование одной формы механической энергии в другую форму механической энергии является процессом обратимым, то преобразование механической энергии в тепловую, происходящее вследствие действия сил трения, является уже процессом необратимым.

«Исчезающее здесь механическое движение исчезает как таковое. Оно на первых порах не восстановимо снова само собою. Процесс непосредственно не обратим. Механическое движение превратилось в качественно отличные формы движения, в тепло, в электричество — в формы молекулярного движения»¹.

Это явление, называемое диссипацией энергии, в гидравлике рассматривается как гидравлическое сопротивление, а величина диссипируемой энергии называется потерями энергии. Потери удельной энергии происходят только в деформирующейся жидкости и вследствие ее вязкости². Явление диссипации в потоке жидкости чрезвычайно сложно. Оно обуславливается возникающими в потоке силами трения.

Для аналитического определения потерь энергии необходимо знать распределение истинных скоростей в потоке, что, однако, известно только для простейших случаев движения. Поэтому в большинстве случаев потери удельной энергии приходится определять на основании экспериментальных данных. Современный гидравлический эксперимент для этой цели широко использует метод моделирования, научной базой которого является теория

¹ Фридрих Энгельс, Диалектика природы, 1953.

² Если бы движение жидкости сводилось только к поступательному перемещению и вращению, т. е. к движению, подобному движению твердого тела, то никаких потерь энергии не было бы (см. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, 1948, ч. II, стр. 299).

подобия. Аналитический прием для определения гидравлических сопротивлений будет использован при изучении ламинарного движения.

Заметим, что величина потерь удельной энергии зависит от режима и скорости движения жидкости, от формы трубопроводов, шероховатости стенок, от различных устройств, монтируемых на трубопроводах. Потери удельной энергии между двумя сечениями элементарной струйки обозначим через h_n . В связи с этим уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости при установившемся движении может быть представлено в виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_n, \quad (8-39)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = -J,$$

где J — падение удельной энергии на единице длины элементарной струйки, называемое гидравлическим уклоном.

Для неустановившегося движения

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_n + h_u. \quad (8-40)$$

Таким образом, в потоке реальной жидкости удельная энергия частиц, расположенных на одной и той же линии тока и слагающаяся из удельной потенциальной энергии положения z , удельной потенциальной энергии давления $\frac{p}{\gamma}$ и

удельной кинетической энергии $\frac{u^2}{2g}$:

$$H_{z,u} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g},$$

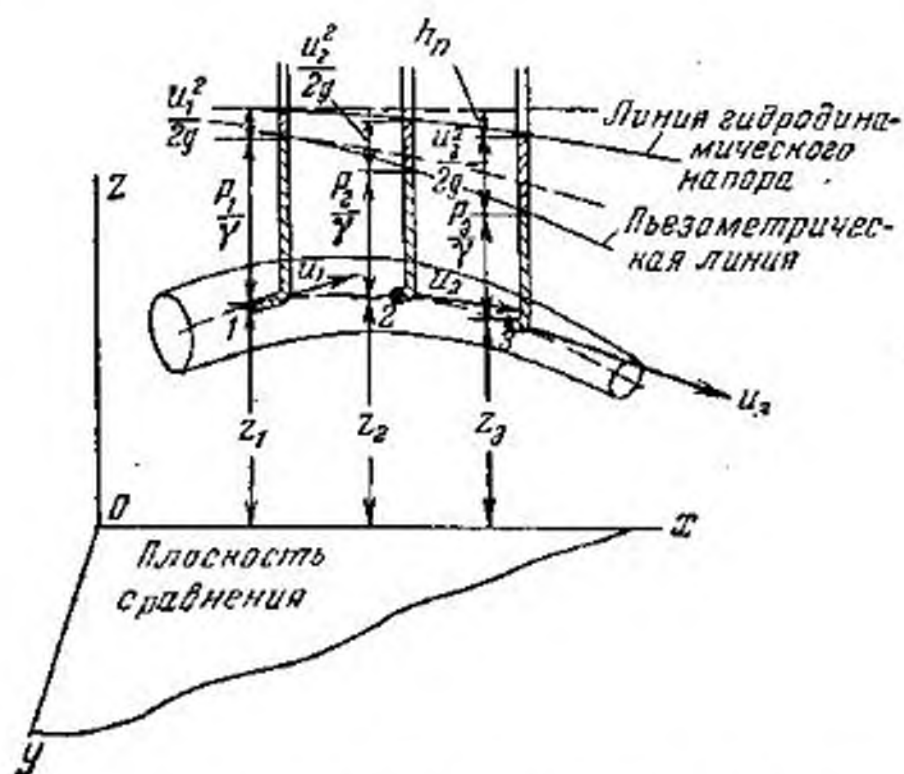
изменяется при переходе от одного сечения к другому.

Вследствие гидравлических сопротивлений энергия $H_{z,u}$ только уменьшается в направлении движения, а вследствие неустановившегося характера движения, благодаря которому создается инерционный напор, энергия или еще больше уменьшается при ускоряющемся движении ($\frac{du}{dt} > 0$), или благодаря инерционному напору потери в той или другой степени компенсируются при затухающем движении ($\frac{du}{dt} < 0$).

8-7. Диаграмма уравнения Д. Бернулли для элементарной струйки капельной жидкости

Благодаря тому, что все члены уравнения Бернулли имеют размерность длины, зависимость между отдельными членами уравнения чрезвычайно наглядно изображается графически (фиг. 8-6).

Построение этой диаграммы осуществляется следующим образом.



Фиг. 8-6. Диаграмма уравнения Бернулли для частицы жидкости в установившемся потоке.

Пунктирная кривая соответствует пьезометрической линии в идеальной жидкости с одной и той же начальной скоростью.

Выбираем произвольным образом систему координат с горизонтальной плоскостью сравнения $хоу$. Взяв на какой-либо линии тока несколько точек, определим давления и скорости в них. По вертикали вверх от соответствующих точек откладываем сначала значение удельной энергии давления $\frac{p}{\gamma}$, а потом удельной

кинетической энергии $\frac{u^2}{2g}$.

Соединив концы отрезков, изображающих соответствующие удельные энергии линиями, мы получим три линии:

1) линию удельной энергии положения (она же линия тока), причем удельная энергия положения будет измеряться высотой положения данной точки над произвольно расположенной горизонтальной плоскостью сравнения;

2) линию удельной потенциальной энергии, или пьезометрическую линию, причем удельная потенциальная энергия давления будет измеряться отрезком, заключенным между пьезометрической линией и линией удельной энергии положения;

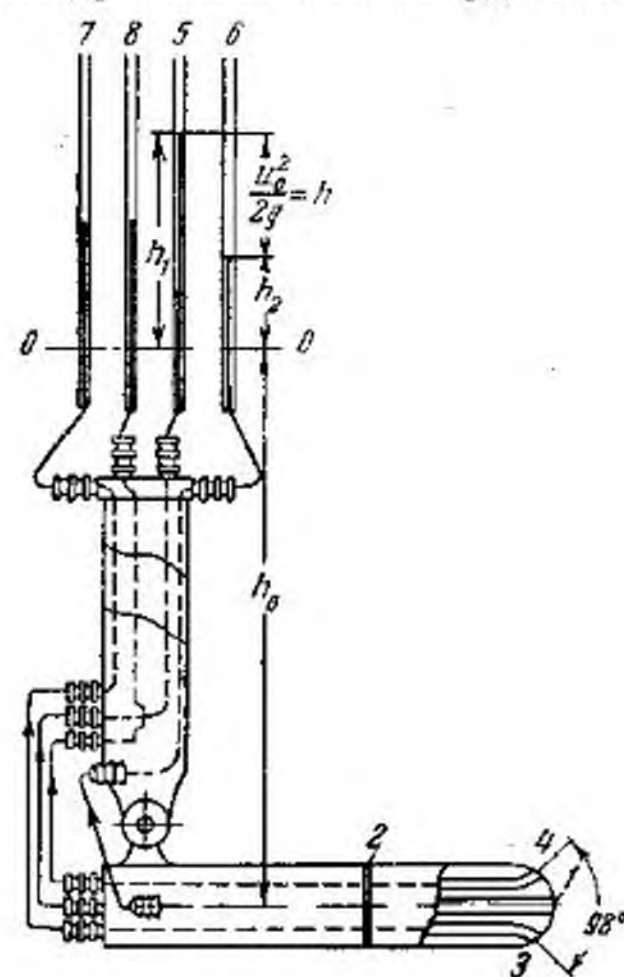
3) линию полной удельной энергии (линия гидродинамического напора), причем удельная кинетическая энергия будет измеряться отрезком, заключенным между линией полной удельной энергии и линией потенциальной удельной энергии. Так как полная удельная энергия частицы реальной жидкости в направлении движения уменьшается, то и линия, ее изображающая, будет спадающей в направлении движения.

Следует обратить внимание на то, что уменьшение полной удельной энергии не вызывает обязательного уменьшения кинетической энергии, которая является лишь частью полной энергии. Например, при равномерном движении скорость частицы постоянна, поэтому постоянен и скоростной напор. Очевидно, что в этом случае уменьшение полной удельной энергии может происходить только за счет изменения полной потенциальной энергии.

Для идеальной жидкости линия полной удельной энергии расположится в горизонтальной плоскости, называемой в идеальной жидкости плоскостью гидродинамического напора.

При одинаковых удельных энергиях для реальной и идеальной жидкости в точке с координатой z_1 линия полной потенциальной энергии для идеальной жидкости изобразится, как показано на фиг. 8-6, пунктиром.

Опытным путем диаграмма уравнения Бернулли может быть построена при помощи прибора, показанного на фиг. 8-7 и называемого скоростной трубкой.



Фиг. 8-7. Трубка ЦАГИ.

8-8. Скоростная трубка

Скоростная трубка предназначается главным образом для измерения скоростного напора. Она представляет собой усовершен-

ствованную ЦАГИ¹ так называемую трубку Пито-Прандтля².

Скоростная трубка (фиг. 8-7) состоит из корпуса, внутри которого расположена центральная трубка 1, открытый конец которой устанавливается против потока таким образом, чтобы скорость потока была направлена по оси отверстия (см. трубку, показанную на фиг. 8-7).

В этом случае при обтекании жидкостью трубки в точке 1 происходит уменьшение скорости от u_0 до нуля и согласно (8-37) увеличение давления на величину

$$\frac{\delta p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g}, \text{ или } \delta p = \rho \cdot \frac{u_0^2}{2}.$$

Благодаря этому в пьезометре 5, присоединенном к этой трубке, жидкость поднимется на высоту

$$h_0 + h_1 = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{u_0^2}{2g}.$$

Избыточное давление невозмущенного потока p_0 соответствует давлению возле щели 2, сделанной в корпусе трубки. Это давление через внутреннюю полость корпуса воспринимается пьезометром 6. В нем жидкость поднимается на высоту $h_0 + h_2 = \frac{p_0}{\gamma}$ (где p_0 — избыточное давление).

Разность высот определяет значение удельной кинетической энергии

$$h = \frac{u_0^2}{2g}.$$

В этом случае скорость может быть вычислена по формуле

$$u_0 = \sqrt{2gh}.$$

Для того чтобы учесть влияние вязкости жидкости и нарушений в потоке, вызываемых установкой трубки, необходимо полученную формулу для скорости представить в виде:

$$u_0 = \varphi \cdot \sqrt{2gh}, \quad (8-41)$$

где коэффициент φ определяется опытным путем. Для трубки ЦАГИ $\varphi = 1 \div 1,04$.

Трубки 3 и 4 служат для установки прибора по направлению скорости. К ним присоединяются два пьезометра 7 и 8. При правильной установке трубки пьезометров 7 и 8 должны давать одинаковые показания.

¹ ЦАГИ — Центральный Аэрогидродинамический институт имени проф. Н. Е. Жуковского.

² Прибор был изобретен французским инженером Пито в 1753 г. и усовершенствован немецким ученым Прандтлем.

8-9. Уравнение Д. Бернулли для потенциального движения капельной жидкости

Вывод уравнения Д. Бернулли для потенциального движения идеальной капельной жидкости дадим, исходя из уравнений Эйлера (8-25).

Если под z подразумевать вертикальную координату, то g_x , g_y и g_z , как проекции ускорения силы тяжести на произвольно расположенные оси координат ξ , η и ζ , могут быть вычислены по формулам:

$$g_x = -\frac{\partial}{\partial \xi}(gz); \quad g_y = -\frac{\partial}{\partial \eta}(gz); \quad g_z = -\frac{\partial}{\partial \zeta}(gz). \quad (8-42)$$

Определим при помощи формул (7-15), заменив в этих формулах координаты x , y и z на ξ , η и ζ , значения:

$$\frac{\partial u_x}{\partial \eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} - 2\Omega_z,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + 2\Omega_y,$$

подставляя найденные значения в уравнения (8-25), получим для капельной жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= -2(\Omega_y u_\zeta - \Omega_z u_\eta) - \frac{\partial u_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= -2(\Omega_z u_\xi - \Omega_x u_\zeta) - \frac{\partial u_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= -2(\Omega_x u_\eta - \Omega_y u_\xi) - \frac{\partial u_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (8-43)$$

Для потенциального потока

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0,$$

а в установившемся движении

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0,$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8-44)$$

откуда следует, что сумма

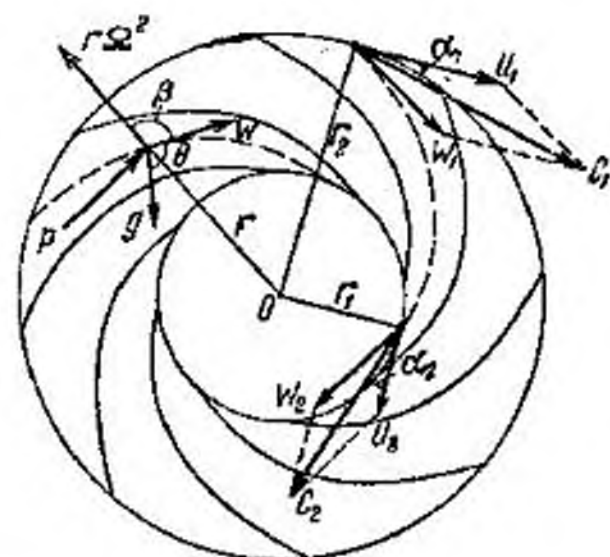
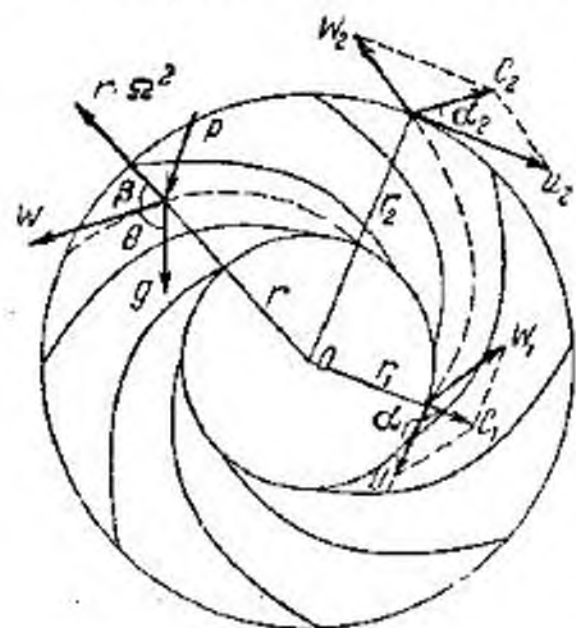
$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const} \quad (8-45)$$

не зависит от координат пространства, т. е. имеет одно и то же значение во всем потоке, а не только на одной линии тока.

8-10. Уравнение Д. Бернулли для идеальной и реальной капельной жидкости в относительном установившемся движении

Уравнение Бернулли для относительного движения будет выведено для установившегося движения идеальной жидкости в канале рабочего колеса гидравлической машины, показанном на фиг. 8-8 и 8-9, вращающегося с постоянной угловой скоростью Ω /сек. вокруг оси, проходящей через центр O .

При исследовании относительного движения будем обозначать скорость абсолютного движения через c , скорость относи-



Фиг. 8-8. Кинематика потока в лопа-
стном колесе насоса или турбины.

Фиг. 8-9. Кинематика потока в лопа-
стном колесе турбины.

тельного движения через w , скорость переносного движения через u .

Жидкость, заполняющая каналы рабочего колеса, вращается вместе с колесом и, кроме того, перемещается в каналах рабочего колеса, т. е. совершает относительное движение по отношению к рабочему колесу. Таким образом, абсолютная скорость c некоторой частицы определяется диагональю параллелограмма, построенного на скорости относительного движения w и скорости переносного движения u :

$$u = \frac{2\pi r n}{60}, \quad (8-46)$$

где r — расстояние частицы от оси вращения;

n — число оборотов рабочего колеса в минуту.

Для получения уравнения безразлично направление относительного движения также, как и направление вращения. Случай относительного движения в направлении к внешней окружности колеса имеет место всегда в центробежном насосе. В турбинах возможно движение и в направлении к внутренней окружности

колеса. Полученные результаты будут справедливы и для любого другого относительного движения, если только переносное движение будет вращательным.

Воспользуемся уравнением (8-27). Спроектируем его на направление касательной к траектории относительного движения. Проекция силы инерции Кориолиса на касательную равна нулю, так как она перпендикулярна к этой траектории.

Ускорение силы инерции переносного движения равно центробежному ускорению силы инерции.

$$J_{пер} = r \Omega^2.$$

Подставляя, получим:

$$g \cos \theta + r \Omega^2 \cos \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{dw}{dt}, \quad (8-47)$$

но

$$\cos \theta = - \frac{\partial z}{\partial l},$$

где z — вертикальная координата;

$$\cos \beta = \frac{\partial r}{\partial l};$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w^2}{2} \right);$$

для установившегося движения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{w^2}{2} \right).$$

Подставляя полученные значения в формулу (8-47), будем иметь:

$$-g \frac{\partial z}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\Omega^2 r^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{w^2}{2} \right),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(z - \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} \right) = 0, \quad (8-48)$$

откуда

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} = \text{const.} \quad (8-49)$$

Для двух частиц, расположенных на одной линии тока, или для одной частицы в ее двух положениях на ее траектории это уравнение может быть представлено в виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} - \left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} \right). \quad (8-50)$$

Из последнего выражения следует, что полная удельная энергия частицы идеальной жидкости в относительном движении $H_{от}$, равная

$$H_{от} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g}, \quad (8-51)$$

изменяется на величину

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$$

за счет работы центробежных сил инерции переносного движения.

В центробежном насосе всегда $u_2 > u_1$, поэтому удельная энергия в относительном движении всегда увеличивается за счет работы центробежных сил инерции переносного движения.

В турбине возможно как увеличение $H_{от}$ (работа турбины по схеме фиг. 8-8), так и уменьшение (работа по схеме фиг. 8-9). Если $u_2 = u_1$, что имеет место в осевых насосах и турбинах, удельная энергия в относительном движении идеальной жидкости не изменяется.

В реальной жидкости одновременно с изменением $H_{от}$ за счет работы центробежных сил инерции переносного движения эта энергия уменьшается, затрачиваясь на преодоление гидравлических сопротивлений, на h_n . Поэтому уравнение Бернулли для частицы реальной жидкости в ее относительном движении будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + h_n. \quad (8-52)$$

Следует отметить, что приращение (положительное или отрицательное) энергии движущейся частицы в ее относительном движении

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$$

представляет собой только часть приращения энергии частицы в ее абсолютном движении.

В насосе удельная энергия в абсолютном движении увеличивается на $H_{нас}$ за счет работы, совершаемой рабочим колесом. В турбине удельная энергия в абсолютном движении уменьшается на $H_{тур}$ благодаря превращению ее в механическую энергию на валу турбины и гидравлическим сопротивле-

ниям в канале. Для вычисления $H_{нас}$ и $H_{тур}$ надо воспользоваться формулами:

$$H_{нас} = \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} \right), \quad (8-53)$$

$$H_{тур} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g} \right). \quad (8-54)$$

В этом уравнении z и c — уже абсолютные координаты и абсолютные скорости частиц, т. е. частиц жидкости, расположенных на траектории, соответствующей абсолютному движению, или на линии тока, соответствующей тому же движению.

В формуле (8-53) правая часть определяет удельную энергию, которую жидкость приобретает при протекании через насос. В формуле (8-54) правая часть определяет энергию, которую жидкость теряет при протекании через турбину. Подставляя в уравнения (8-53) и (8-54) значения $p_2 - p_1$ из уравнения (8-52):

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = z_1 - z_2 + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} - h_n,$$

вместо w_1^2 и w_2^2 их значения из треугольника скоростей (фиг. 8-8 и 8-9)

$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2 \cdot c_2 u_2 \cos \alpha_2,$$

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2 \cdot c_1 u_1 \cos \alpha_1$$

и пренебрегая разностью z , получим:

$$H_{нас} + h_n = \frac{1}{g} (c_2 u_2 \cos \alpha_2 - c_1 u_1 \cos \alpha_1); \quad (8-55)$$

$$H_{тур} - h_n = \frac{1}{g} (c_1 u_1 \cos \alpha_1 - c_2 u_2 \cos \alpha_2). \quad (8-56)$$

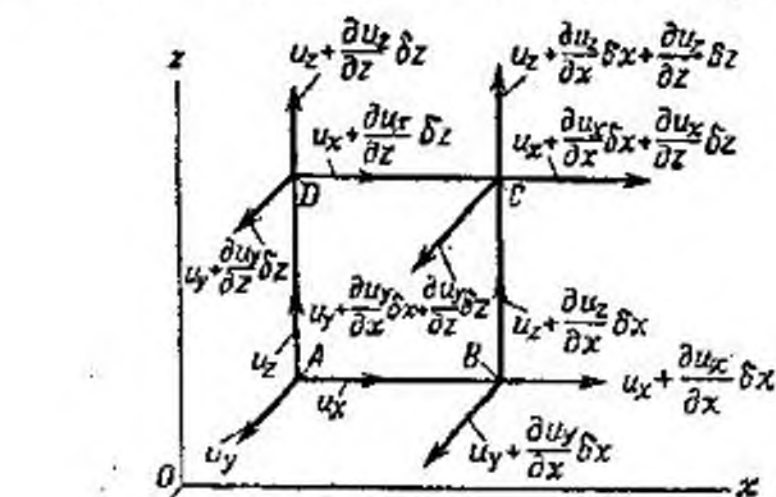
Для насоса правая часть уравнения (8-55) определяет удельную энергию, которую рабочее колесо передает протекающей жидкости. Для турбины правая часть уравнения (8-56) определяет удельную энергию, которую жидкость отдает только рабочему колесу турбины.

Глава девятая

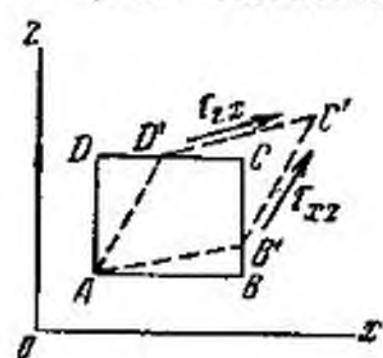
НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ
ГИДРОДИНАМИКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

9-1. Обобщенный закон трения

Обобщенный закон трения определяет силы трения, возникающие в потоке в общем случае движения. Так же как и для случая движения, рассмотренного в § 2-4, в общем случае напряжения сил трения оказываются



Фиг. 9-1. Схема распределения скоростей в криволинейном потоке.



Фиг. 9-2. Схема напряжений трения, возникающих на гранях прямоугольника.

пропорциональными угловым скоростям сдвига, причем коэффициент пропорциональности является коэффициентом вязкости. Иначе определяется лишь угловая скорость сдвига.

Рассмотрим частицу жидкости в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами, равными δx , δy и δz . Определим сдвиг угла DAB (фиг. 9-1), происходящее вследствие разности скоростей точки B на $\frac{\partial u_z}{\partial x} \delta x$ и точки D на $\frac{\partial u_x}{\partial z} \delta z$ относительно точки A .

Благодаря этому происходит (фиг. 9-2) поворот ребра AD с угловой скоростью сдвига $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ и ребра AB с угловой скоростью сдвига $\frac{\partial u_z}{\partial x}$. Общая угловая скорость сдвига прямого угла в плоскости xoz равна:

$$\Omega_{xz} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad (9-1)$$

а напряжение силы трения, возникшей на гранях DC и BC ,

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \Omega_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (9-2)$$

В обозначении напряжения сил трения первый индекс указывает площадку действия силы, а второй — направление ее проекции. Например, τ_{xz}

обозначает напряжение силы трения, действующей на площадке, перпендикулярной к оси x , в направлении, параллельном оси z , а τ_{zx} — напряжение силы трения, действующей на площадке, перпендикулярной к оси z , но в направлении, параллельном оси x .

Аналогичные выражения получим и для

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \Omega_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (9-3)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \Omega_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (9-4)$$

Из приведенных рассуждений следует равенство напряжений сил трения, возникающих на взаимно перпендикулярных площадках во взаимно перпендикулярных направлениях.

Докажем это основное свойство напряжений сил трения из других соображений.

Для этого уравниваем силы, показанные на фиг. 9-3, присоединив к ним на основании принципа Даламбера силу инерции. На фигуре вместо сил показаны напряжения, а сила тяжести и сила инерции вообще не изображены. Составим уравнение моментов, например, относительно оси y .

При составлении уравнения моментов необходимо учесть соответственно только силы трения, входящие в зависимости (9-2) и (9-4). Моменты других сил трения, а также сил давления, веса и инерции относительно соответствующих осей равны нулю или вследствие того, что силы параллельны оси, или вследствие того, что сумма их моментов в пределе при стремлении параллелепипеда к точке обращается в нуль. Вследствие этого получим:

$$(\tau_{zx} \delta x \delta y) \delta z - (\tau_{xz} \delta y \delta z) \delta x = 0,$$

откуда следует:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

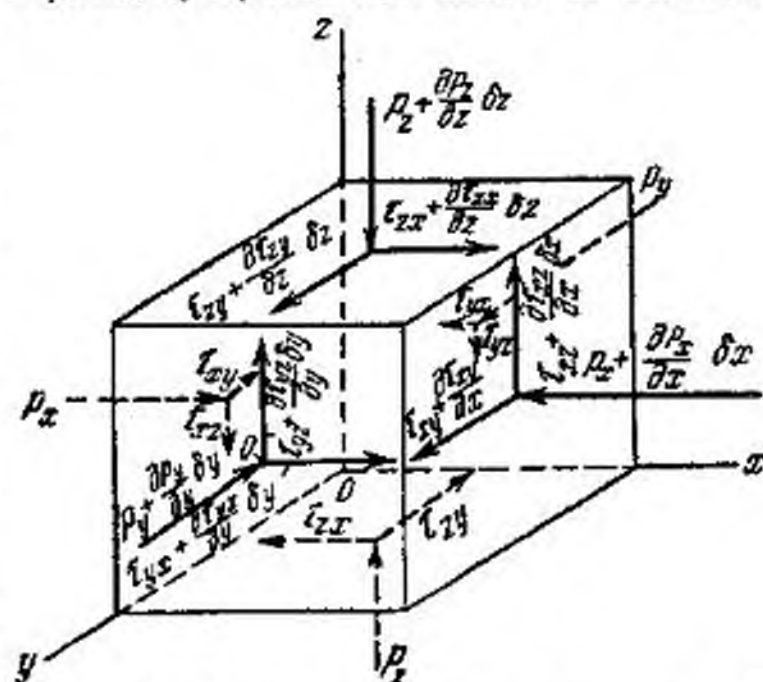
При составлении уравнения моментов относительно осей x и z соответственно получим:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

9-2. Свойство гидродинамического давления
в реальной жидкости

Благодаря силам трения, возникающим в движущейся реальной жидкости, гидродинамическое давление в точке оказывается зависящим от направления, в отличие от давлений гидростатического или гидродинамического в идеальной жидкости.



Фиг. 9-3. Схема поверхностных сил, действующих на элементарный параллелепипед в реальном потоке.

Таким образом,

$$p_x \neq p_y \neq p_z.$$

Однако, как будет доказано ниже, в данной точке потока сумма трех значений гидродинамического давления, измеренных в трех взаимно перпендикулярных направлениях, есть величина, от этих направлений не зависящая.

Докажем, что $p_x + p_y + p_z = \text{const}$.

Для этого в потоке жидкости выделим две трехгранные призмы 1 и 2 (фиг. 9-4), причем такие, чтобы грань ab одной призмы являлась гранью и другой. Ребра призмы параллельны соответствующим осям координат x, z и ξ, ζ .

Для обеих призм напряжения сил трения, действующих на взаимно перпендикулярных площадках, равны:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{\xi\zeta} = \tau_{\zeta\xi}.$$

Рассматриваемые призмы находятся в движении под действием сил давления, трения и веса. Добавляя силы инерции, можно всю эту систему сил считать находящейся в равновесии, вследствие чего сумма проекций всех этих сил на соответствующие оси должна равняться нулю.

Так же как и при доказательстве свойства гидростатического давления, массовые силы в пределе при стремлении призмы к точке обратятся в нуль, вследствие чего, не вводя их в рассмотрение, будем считать находящимися в равновесии силы давления и трения. Спроектируем действующие на призму 1 силы на направление оси ζ и приравняем нулю сумму проекций всех сил; тогда получим:

$$p_{\zeta} bc - p_x ac \sin \alpha - p_z ab \cos \alpha - \tau_{zx} ab \sin \alpha - \tau_{xz} ac \cos \alpha = 0.$$

Сумма проекций сил трения на торцах в пределе равна нулю.

Разделив на bc , получим:

$$p_{\zeta} = p_x \sin^2 \alpha + p_z \cos^2 \alpha + 2 \tau_{xz} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Спроектируем силы, действующие на призму 2, на направление ξ и приравняем сумму проекций всех сил нулю. Получим:

$$-p_{\xi} bc + p_x ac \cos \alpha + p_z ab \sin \alpha - \tau_{zx} ab \cos \alpha - \tau_{xz} ac \sin \alpha = 0.$$

Разделив на bc , будем иметь:

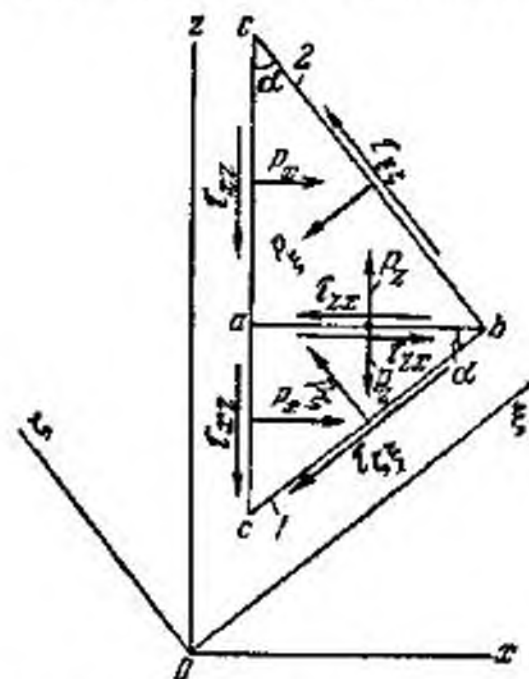
$$p_{\xi} = p_x \cos^2 \alpha + p_z \sin^2 \alpha - 2 \tau_{xz} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Складывая p_{ζ} и p_{ξ} , найдем:

$$p_{\zeta} + p_{\xi} = p_x + p_z.$$

Так как в обоих случаях третьи оси координат y и η совпадают, то

$$p_y = p_{\eta}.$$



Фиг. 9-4. Схема поверхностных сил, действующих на элементарную призму в реальном потоке.

На основании последнего и в связи с предыдущим имеем:

$$p_{\zeta} + p_{\xi} + p_y = p_x + p_y + p_z. \quad (9-5)$$

Из равенства (9-5) следует, что сумма трех значений гидродинамического давления в точке, взятых по трем произвольным, но обязательно по взаимно перпендикулярным направлениям, есть величина, не зависящая от положения системы координат. Значит, для данной точки будет не зависящим от системы координат, а значит, и от направления и среднее арифметическое от их значений:

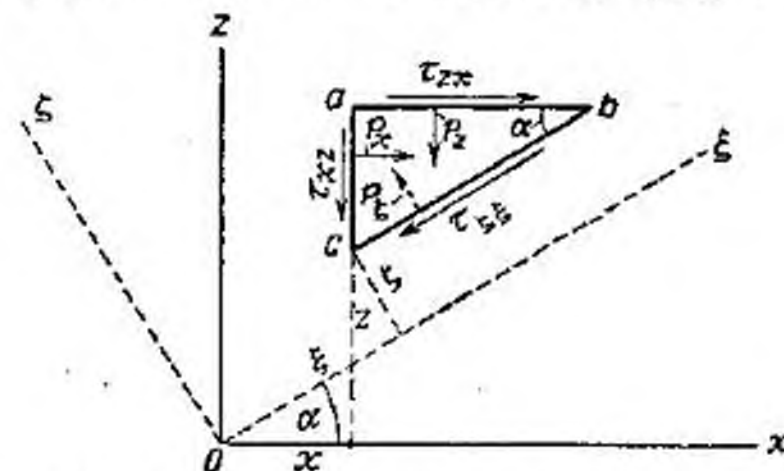
$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}, \quad (9-6)$$

называемое гидродинамическим давлением в данной точке.

Само собой разумеется, что при определении силы, действующей в некотором направлении, необходимо исходить из величины давления, соответствующего интересующему нас направлению.

9-3. Гидродинамическое давление в данном направлении

Для вычисления гидродинамического давления в данном направлении в потоке выделим трехгранную призму (фиг. 9-5) с ребрами ab и ac , параллельными осям x и z , и ребром cb , параллельным оси ξ второй системы координат, повернутой относительно первой на угол α вокруг оси y .



Фиг. 9-5. Схема поверхностных сил, действующих на элементарную призму в реальном потоке.

Рассматриваемая призма находится в движении под действием сил веса, давления и трения. Воспользуемся принципом Даламбера. Массовые силы в пределе при стремлении призмы к точке обращаются в нуль, поэтому в рассмотрение их не вводим. Составив уравнения равновесия сил, получим:

$$p_x ac \cos \alpha - p_z ab \sin \alpha - \tau_{xz} ac \sin \alpha - \tau_{zx} ab \cos \alpha - \tau_{\xi\xi} cb = 0.$$

Разделив на cb , будем иметь:

$$\tau_{\xi\xi} = \tau_{xz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (p_x - p_z) \sin \alpha \cos \alpha.$$

С другой стороны, согласно (9-2):

$$\tau_{\xi\xi} = \mu \left(\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} \right). \quad (9-7)$$

Преобразуем это уравнение, имея в виду, что

$$\xi = x \cos \alpha + z \sin \alpha; \quad \zeta = -x \sin \alpha + z \cos \alpha,$$

откуда

$$u_\xi = \xi' = u_x \cos \alpha + u_z \sin \alpha, \\ u_\zeta = \zeta' = -u_x \sin \alpha + u_z \cos \alpha,$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_\xi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta},$$

но так как в свою очередь

$$x = \xi \cos \alpha - \zeta \sin \alpha; \quad z = \xi \sin \alpha + \zeta \cos \alpha,$$

то

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = -\sin \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \cos \alpha,$$

поэтому

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial z} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial u_\zeta}{\partial x} \cdot \sin \alpha.$$

Продифференцировав u_ζ по z и x , найдем:

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \sin \alpha.$$

Подставляя эти значения в $\frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta}$, получим:

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \cos^2 \alpha - \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \sin^2 \alpha + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \cdot \sin \alpha \cos \alpha.$$

Поступая аналогично, будем иметь:

$$\frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \cos^2 \alpha - \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \sin^2 \alpha + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \cdot \sin \alpha \cos \alpha.$$

Подставим найденные значения в (9.7):

$$\tau_{\xi\zeta} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \cos^2 \alpha - \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \sin^2 \alpha + 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \sin \alpha \cos \alpha \right],$$

но согласно (9.2)

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

поэтому

$$\tau_{\xi\zeta} = \tau_{xz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2\mu \sin \alpha \cos \alpha \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right).$$

Сопоставляя $\tau_{\xi\zeta}$ с ранее найденным значением, которое вновь выведем здесь:

$$\tau_{\xi\zeta} = \tau_{xz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (p_x - p_z) \sin \alpha \cos \alpha,$$

найдем, что

$$p_x - p_z = 2\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right).$$

Отсюда следует, что

$$p_x + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} = p_z + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

и вообще

$$p_x + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} = p_y + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} = p_z + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = C,$$

или

$$C = \frac{p_x + p_y + p_z}{3} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

Вводя вместо $\frac{p_x + p_y + p_z}{3} = p$, получим:

$$p_x + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} = p + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

и окончательно

$$p_x = p - 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

Соответственно предыдущему будем иметь также

$$p_y = p - 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right),$$

$$p_z = p - 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

(9.8)

Для несжимаемых жидкостей справедливо уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Вследствие этого величины гидродинамического давления для соответствующих направлений будут определяться уравнениями:

$$p_x = p - 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

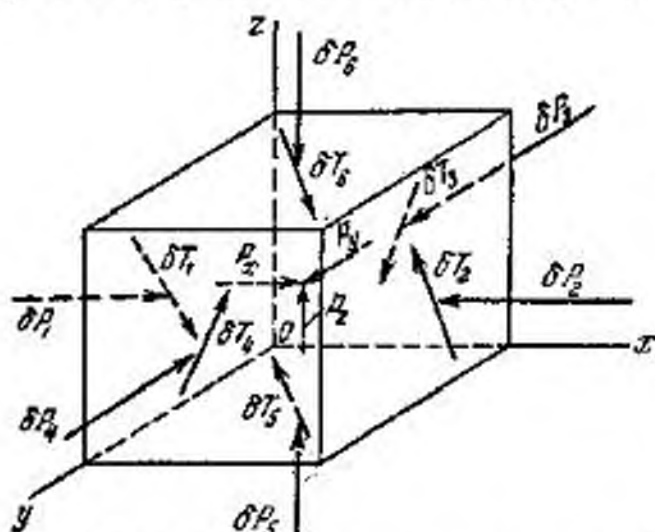
$$p_y = p - 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$p_z = p - 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

(9.9)

9-4. Дифференциальные уравнения движения реальной жидкости (уравнения Навье-Стокса)

Для вывода дифференциальных уравнений движения реальной жидкости выделим в потоке элементарный параллелепипед, ребра которого δx , δy и δz параллельны соответствующим произвольно расположенным осям координат (фиг. 9-6) и масса которого δM .



Фиг. 9-6. Схема поверхностных сил, действующих на элементарный параллелепипед в реальном потоке.

Рассматриваемый параллелепипед находится в движении под действием сил давления δP_i , трения δT_i и веса $\delta G = g \cdot \delta M$.

Геометрическая сумма действующих сил должна равняться произведению массы параллелепипеда $\delta M = \rho \delta x \delta y \delta z$ на вектор ускорения движения его центра $\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{dt}$:

$$\sum_{i=1}^6 \delta P_i + \sum_{i=1}^6 \delta T_i + \delta G = \delta M \cdot \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (9-10)$$

Преобразование этого уравнения приводит к дифференциальным уравнениям движения реальной жидкости (капельной и газа) — уравнениям Навье-Стокса.

Для получения этих уравнений спроектируем векторное уравнение (9-10), например, на ось x . Обозначим давление в центре параллелепипеда и в направлении оси x через p_x .

Получим:

$$\delta P_1 - \delta P_2 + (\delta T_3)_x + (\delta T_4)_x + (\delta T_5)_x + (\delta T_6)_x + \delta G_x = \delta M \cdot \frac{du_x}{dt} \quad (9-11)$$

Проекция силы $\delta P_1 = \left(p_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot \delta x \right) \delta y \delta z$;

• • $\delta P_2 = \left(p_x + \frac{1}{2} \frac{\partial p_x}{\partial x} \cdot \delta x \right) \delta y \delta z$;

• • $(\delta T_3)_x = -\tau_{yx} \delta x \delta z$ (см. фиг. 9-3);

• • $(\delta T_4)_x = \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \delta y \right) \delta x \delta z$;

• • $(\delta T_5)_x = -\tau_{zx} \delta x \delta y$ (см. фиг. 9-3);

• • $(\delta T_6)_x = \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \delta z \right) \delta x \delta y$;

• • $\delta G_x = X \rho \delta x \delta y \delta z$.

В последних уравнениях X обозначает проекцию на ось x ускорения только силы тяжести \bar{g} , а $\frac{du_x}{dt}$ проекцию на ось вектора ускорения движения $\frac{d\bar{u}}{dt}$.

Проекции остальных сил на ось x равны нулю, так как силы перпендикулярны к оси проекции.

Подставляя найденные значения сил в уравнение (9-11) и сокращая на $\rho \delta x \delta y \delta z$, т. е. относя уравнение движения к единице массы, получаем:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \frac{du_x}{dt} \quad (9-12)$$

Аналогичные уравнения могут быть получены и в проекциях на оси y и z :

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = \frac{du_y}{dt} \quad (9-13)$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) = \frac{du_z}{dt} \quad (9-14)$$

В дальнейшем приведем подробные преобразования лишь для уравнения (9-12). Подставляя в это уравнение согласно уравнению (9-8)

$$p_x = p - 2\mu \frac{du_x}{dx} + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} + \frac{du_z}{dz} \right),$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right),$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right),$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right),$$

будем иметь:

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) = \frac{du_x}{dt},$$

или

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \times \times \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{du_x}{dt} \quad (9-15)$$

и по аналогии для других осей:

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{du_y}{dt}; \quad (9-16)$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{du_z}{dt}. \quad (9-17)$$

Для капельной жидкости дифференциальные уравнения движения упрощаются, так как из уравнения неразрывности для капельной жидкости следует, что

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Вследствие этого равенства дифференциальные уравнения движения примут вид:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = \frac{du_x}{dt}, \quad (9-18)$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = \frac{du_y}{dt}, \quad (9-19)$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = \frac{du_z}{dt}. \quad (9-20)$$

Уравнения (9-15) — (9-17) и (9-18) — (9-20) называются уравнениями Навье-Стокса. При $\mu = 0$ эти уравнения обращаются в уравнения Эйлера.

Исследуем уравнения (9-18) — (9-20) для потенциального движения. Воспользовавшись зависимостями (7-17), будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

аналогично получим и для

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

Подставляя эти значения в уравнение (9-18), найдем:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{du_x}{dt}.$$

Но согласно уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Поэтому уравнения Навье-Стокса для потенциального движения будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (9-21)$$

т. е. по виду эти уравнения не отличаются от уравнений Эйлера. Однако следует иметь в виду, что в этих уравнениях в отличие от уравнений Эйлера

$$\rho = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}.$$

Н. Е. Жуковский указывал, что «При существовании потенциала скоростей вязкость не оказывает влияния на движение внутри жидкости, а также не влияет на распределение давлений внутри ее. Влияние вязкости при существовании потенциала скоростей может проявляться при стенках сосуда, на которых должны быть соблюдены граничные условия»¹.

Глава десятая

ДИНАМИКА ПОТОКА

В настоящей главе рассмотрены различные закономерности, относящиеся к потоку жидкости. Основная задача этой главы — распространить на поток в целом зависимости, полученные для элементарной струйки.

10-1. Живое сечение потока

Весьма важной характеристикой формы потока являются его живые сечения.

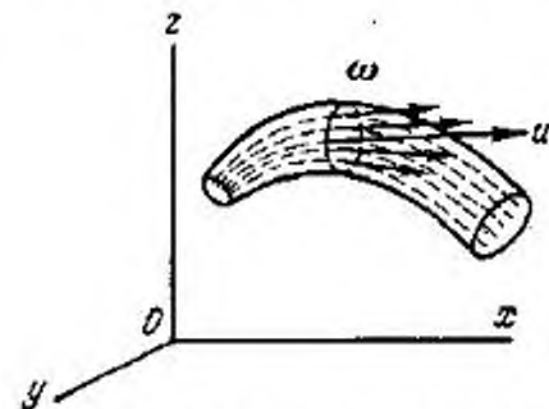
Живым сечением потока называется поверхность, являющаяся геометрическим местом частиц жидкости, скорости которых перпендикулярны к соответствующим элементам поверхности. Так как векторы скоростей частиц направлены по касательной к линиям тока, то живое сечение потока можно определить как поверхность, ортогональную к линиям тока (фиг. 10-1).

В турбулентных потоках в общем случае под живыми сечениями потока подразумеваются сечения, ортогональные к местным осредненным скоростям.

Площадь живого сечения ω складывается из площадей живых сечений элементарных струек $\omega = \sum \delta \omega$. Живое сечение ограничено ложем потока (естественным или искусственным). Это огра-

¹ Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, «Теоретические основы воздухоплавания», ч. I, стр. 350, ОНТИ НКТП СССР, 1938.

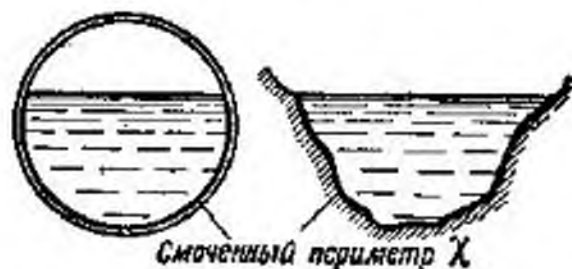
нение может быть полным (фиг. 10-2) или частичным (фиг. 10-3 и 10-4). Периметр сечения ложа, совпадающий с периметром живого сечения потока, называется смоченным периметром.



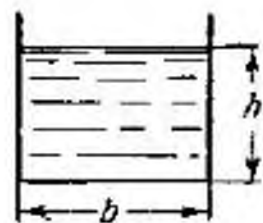
Фиг. 10-1. Живое сечение потока ортогонально к линиям тока.



Фиг. 10-2. Живое сечение потока в цилиндрической трубе при напорном движении.



Фиг. 10-3. Живое сечение потока в безнапорном движении.



Фиг. 10-4. Живое сечение в прямоугольном канале.

метром ложа и обозначается буквой χ . По фиг. 10-3 и 10-4 смоченный периметр ложа меньше периметра площади живого сечения потока. Такой поток называется безнапорным.

Отношение площади живого сечения потока к смоченному периметру ложа называется гидравлическим радиусом R :

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (10-1)$$

Как увидим в дальнейшем, гидравлический радиус явится весьма важной характеристикой и формы потока и формы ложа. Гидравлический радиус круглого трубопровода с радиусом r , полностью заполненного движущейся жидкостью, равен:

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{r}{2}.$$

Для потока со свободной поверхностью глубиной h в прямоугольном канале шириной b

$$R = \frac{bh}{2h + b}.$$

10-2. Расход потока

Расходом потока называется количество жидкости, протекающее через некоторое поперечное сечение потока в единицу времени. Это сечение должно быть сделано так, чтобы оно обязательно пересекало каждую элементарную струйку и только один раз. Обычно за поверхность сечения принимают живое сечение потока.

Расход потока выражается или в весовых единицах, например в $кг/сек$, или в массовых единицах, например в $кг \cdot сек/м$, или в объемных, например в $м^3/сек$. В первом случае расход будет называться весовым, во втором — массовым и в третьем — объемным. Весовой расход будем обозначать буквой G , массовый — M и объемный — Q .

Между весовым, массовым и объемным расходом существует зависимость, определяемая формулой

$$G = gM = g\rho Q = \gamma Q, \quad (10-2)$$

где g — ускорение силы тяжести;

ρ — плотность;

γ — объемный вес.

В дальнейшем будем говорить чаще всего лишь об объемном расходе Q .

Расход потока Q складывается из расходов элементарных струек и определяется по формуле

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega, \quad (10-3)$$

где $d\omega$ — живое сечение элементарной струйки.

Для аналитического вычисления расхода необходимо знать закон распределения скоростей по сечению потока.

Формула (10-3) может служить также и для экспериментального определения расхода. В этом случае разбивают площадь живого сечения на достаточное число элементарных площадок $d\omega$ и опытным путем определяют скорость u в центре каждой площадки. Интегрирование заменяют суммированием произведений $u d\omega$.

$$Q = \sum dQ = \sum u d\omega.$$

Для определения расходов существуют специальные приборы. Некоторые типы приборов будут описаны в гл. 16.

10-3. Средняя скорость потока

Исследование скоростей по живому сечению потока показывает их неравномерное распределение.

Например, в ламинарном движении скорости по сечению распределяются по параболическому закону. В турбулентном движе-

нии распределение местных осредненных скоростей подчиняется приблизительно показательному или логарифмическому закону. Вместе с тем для многих гидравлических закономерностей оказывается целесообразным ввести в рассмотрение некоторую фиктивную так называемую среднюю скорость потока.

Средней по живому сечению скоростью потока называется скорость, вычисляемая по формуле.

$$v = \frac{\int u d\omega}{\omega} \quad (10-4)$$

Так как интеграл $\int u d\omega = Q$, т. е. равен расходу жидкости через данное живое сечение, то средняя скорость может быть вычислена через расход по формуле

$$v = \frac{Q}{\omega} \quad (10-5)$$

Среднюю скорость можно также рассматривать как среднее значение объемного расхода, отнесенного к единице площади живого сечения.

10-4. Уравнение неразрывности потока

Распространим уравнение неразрывности для элементарной струйки на струйный поток.

Воспользуемся формулой (8-11)

$$\rho_1 u_1 \delta\omega_1 = \rho_2 u_2 \delta\omega_2.$$

Напомним, что это уравнение справедливо для установившегося движения любой жидкости, как капельной, так и сжимаемой (газа).

Взяв интеграл от левой и правой частей и распространив его по всей площади живого сечения, получим:

$$\int_{\omega_1} \rho_1 u_1 d\omega_1 = \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 d\omega_2.$$

Как известно, левый и правый интегралы определяют массовый расход жидкости через живые сечения ω_1 и ω_2 . Поэтому предыдущее выражение может быть переписано в виде:

$$M_1 = M_2,$$

или
$$M = \text{idem}, \quad (10-6)$$

т. е. массовый расход по длине установившегося потока имеет одно и то же значение.

Для капельной жидкости $\rho = \text{const}$, поэтому

$$\int u_1 d\omega_1 = \int u_2 d\omega_2,$$

или, что то же самое,

$$Q_1 = Q_2,$$

или

$$Q = \text{idem}, \quad (10-7)$$

т. е. объемный расход капельной жидкости по длине установившегося потока имеет одно и то же значение.

Имея в виду, что согласно формуле (10-5)

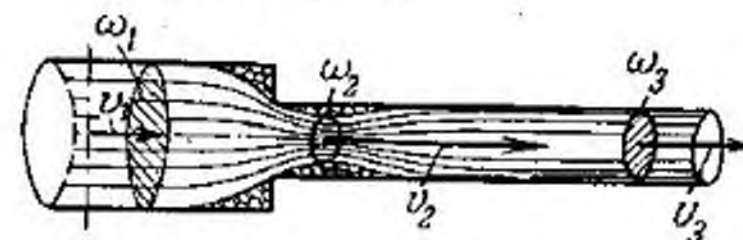
$$Q = v\omega,$$

из уравнения (10-7) получим, что (фиг. 10-5)

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2 = v_3 \omega_3, \quad (10-8)$$

откуда, например,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$



Фиг. 10-5. Схема потока с переменным живым сечением.

т. е. средние скорости обратно пропорциональны площадям живых сечений потока.

Заметим, что формула (10-8) справедлива и для неустановившегося движения капельной жидкости, происходящего в полностью заполненном жестком трубопроводе, так как в этом случае в формуле (8-16) $\delta\omega$ не зависит от времени, т. е. $\frac{\partial}{\partial t}(\delta\omega) = 0$.

10-5. Мощность потока N в данном живом сечении потока

В связи с необходимостью в дальнейшем распространить уравнение Бернулли (8-40), полученное для элементарной струйки, на поток полезно ввести понятия мощности потока в данном сечении и инерционной мощности потока длиной l . Инерционная мощность будет разобрана в следующем параграфе.

Мощностью потока в данном живом сечении назовем энергию, которой обладает протекающая через живое сечение масса жидкости, равная секунднему расходу.

Мощность потока N [кГ·м/сек] складывается (фиг. 10-6) из мощностей элементарных струек:

$$dN = H_{z\partial} \cdot dG, \quad (10-9)$$

где

$H_{z\partial} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$ — удельная энергия частицы, м; $dG = \gamma u d\omega$ — весовой расход элементарной струйки, кГ/сек.

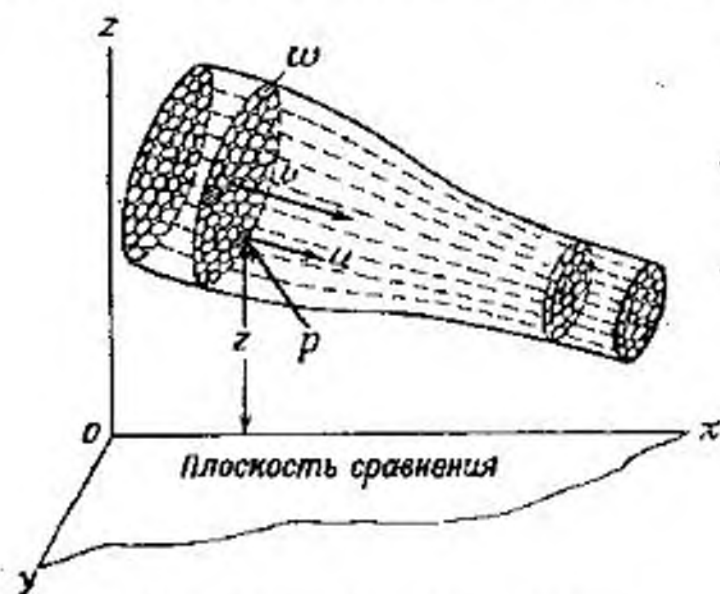
Таким образом,

$$N = \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) \cdot \gamma u d\omega. \quad (10-10)$$

Для вычисления мощности потока надо было бы знать закон распределения давления и скоростей по живому сечению потока, что, однако, в общем случае неизвестно. Значение этого интеграла можно найти и графоаналитическим способом, а именно: разбивают живое сечение на элементарные площадки и для каждой из них находят z , p и u , а затем и dN . Мощность потока определяют как сумму элементарных мощностей $\sum dN$.

Для вычисления мощности потока необходимо найти значение интеграла

$$K = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho u^3 d\omega.$$



Фиг. 10-6. Схема струйного потока.

Этот интеграл представляет собой значение кинетической энергии, которой обладает протекающая через данное живое сечение масса жидкости, равная секундному расходу. Для его вычисления необходимо знать закон распределения скоростей по живому сечению потока. Вычисления этого интеграла показывают, что

$$\int u^3 d\omega \neq v^3 \omega.$$

Введем коэффициент кинетической энергии — α

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{v^3 \omega}. \quad (10-11)$$

Значение коэффициента α в большинстве случаев можно определить только опытным путем. Теоретически вычислить его возможно лишь для ограниченного вида движений (например, для некоторых случаев ламинарного движения, для турбулентного движения в круглых трубопроводах).

В турбулентном движении при больших значениях чисел Re в прямых трубопроводах среднее значение коэффициента α приблизительно равно $\alpha = 1,1$. В некоторых случаях ламинарного движения $\alpha = 2$.

В других случаях с более неравномерным распределением скоростей коэффициент α может принимать и большие значения.

Так, например, по опытам И. Г. Есьмана в сечениях на участке *встр* внезапного расширения (фиг. 15-6) значение коэффициента α может доходить до 5 и больше.

Если бы скорость во всех точках живого сечения была одинакова, то α равнялось бы единице. Следовательно, значение коэффициента α , который, как следует из формулы, безразмерен, зависит от неравенства скоростей отдельных частиц данного сечения, или, как говорят, от степени неравномерности распределения скоростей по живому сечению. Коэффициент α является поправкой к значению кинетической энергии секундной массы, вычисленной по средней скорости. Действительно, кинетическая энергия K массы жидкости, протекающей в единицу времени через все живое сечение, т. е. массового расхода M , определится по формуле

$$K = \int_{\omega} dM \cdot \frac{u^2}{2},$$

где $dM = \rho u d\omega$ — масса жидкости, протекающей через сечение элементарной струйки в единицу времени, т. е. элементарный массовый расход. Подставляя, получим:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho u^3 d\omega.$$

Кинетическая энергия той же секундной массы $M = \rho v \omega$, но вычисленная по средней скорости будет:

$$K' = \frac{1}{2} \rho v^3 \omega.$$

Отношение действительного значения кинетической энергии к ее значению, вычисленному по средней скорости, будет равно:

$$\frac{K}{K'} = \frac{\int_{\omega} \rho u^3 d\omega}{\rho v^3 \omega} = \alpha. \quad (10-12)$$

Вводя коэффициент α , можем определить K по формуле

$$K = \frac{1}{2} \cdot \alpha \rho v^3 \omega. \quad (10-13)$$

10-6. Инерционная мощность потока

Инерционной мощностью потока (фиг. 10-6) назовем выражение

$$N_n = \int_{\omega} h_n \gamma u d\omega,$$

где $h_n = \frac{1}{g} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dt$ — инерционный напор элементарной струйки длиной l .

Подставляя значение h_n в N_n , будем иметь:

$$N_n = \int_{\omega} \left(\int_0^l \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u dt \right) d\omega.$$

Этот интеграл можно представить и в виде:

$$N_n = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_{\omega} \rho u^2 d\omega \right) dt.$$

Рассмотрим сперва интеграл

$$q = \int_{\omega} \rho u^2 d\omega.$$

Интеграл q отличается от интеграла K , кроме постоянного множителя, еще и тем, что под интегралом стоит скорость не в третьей, а во второй степени. Этот интеграл представляет собой количество движения, которым обладает протекающая через данное живое сечение масса жидкости, равная секундному расходу. Для его вычисления также необходимо знать закон распределения скоростей по живому сечению потока.

Вычисления этого интеграла дают, что

$$\int_{\omega} \rho u^2 d\omega \neq \rho v^2 \omega.$$

Введем коэффициент количества движения β

$$\beta = \frac{\int_{\omega} \rho u^2 d\omega}{\rho v^2 \omega}. \quad (10-14)$$

Для вычисления коэффициента β необходимо также знать закон распределения скоростей по площади живого сечения потока. В некоторых случаях ламинарного движения $\beta = 1,33$. В турбулентном движении в круглой трубе его можно принимать равным $\beta = 1,04$. В других случаях коэффициент β

вычисляется на основании опытных данных, аналогично коэффициенту α .

Коэффициент β , так же как и коэффициент α , характеризует степень неравномерности распределения скоростей по живому сечению потока, но в отличие от α коэффициент является поправкой к значению количества движения секундной массы, вычисленной по средней скорости.

Вводя коэффициент β , можно определить q через среднюю скорость, а именно

$$q = \int_{\omega} \rho u^2 d\omega = \beta \rho v^2 \omega = \beta \rho Q v. \quad (10-15)$$

В связи с формулой (10-15) инерционная мощность может быть вычислена по формуле

$$N_n = \frac{\gamma}{2g} \cdot \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (\beta v^2 \omega) dt,$$

или

$$N_n = \frac{\gamma}{g} \cdot \int_0^l \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot d l Q,$$

или

$$N_n = \gamma Q \cdot \frac{1}{g} \int_0^l \beta \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt. \quad (10-16)$$

Назовем инерционным напором потока H_n (удельной инерционной мощностью) отношение N_n к γQ . Из формулы (10-16) получим:

$$H_n = \frac{1}{g} \cdot \int_0^l \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt. \quad (10-17)$$

Для трубопровода постоянного сечения

$$H_n = \beta \frac{l}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (10-18)$$

где

$$l = \int_0^l dt.$$

10-7. Уравнение Бернулли для неустановившегося и установившегося потока реальной капельной жидкости

Распространим уравнение Бернулли (8-40), полученное для элементарной струйки, в виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_a + h_n$$

на поток. Для этого умножим левую и правую части уравнения на весовой расход элементарной струйки $dG = \gamma u d\omega$, возьмем интеграл от обеих частей уравнения, распространив его на соответствующие площади живых сечений ω_1 и ω_2 . Получим

$$\int_{\omega_1} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) \gamma u d\omega = \int_{\omega_2} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) \gamma u d\omega + \int_{\omega_2} h_n \gamma u d\omega + \frac{1}{g} \int_0^l \frac{du}{dt} \cdot dl \gamma u d\omega.$$

Первые два интеграла представляют согласно § 10-5 мощности потока N_1 и N_2 в первом и втором живом сечении потока. Интеграл $\int_{\omega_2} h_n \gamma u d\omega = N_n$ определяет потерю потоком мощности, вызванную гидравлическим сопротивлением.

Интеграл $\frac{1}{g} \int_0^l \frac{du}{dt} \cdot dl \gamma u d\omega = N_n$ представляет инерционную мощность потока.

В связи с этим предыдущее уравнение можно рассматривать как уравнение баланса мощностей:

$$N_1 = N_2 + N_n + N_n. \quad (10-19)$$

Разделив каждый член этого уравнения на весовой расход и обозначая через

$$\frac{N}{\gamma Q} = E \text{ — удельную мощность потока (удельную энергию),}$$

$$\frac{N_n}{\gamma Q} = H_n \text{ — удельный инерционный напор (удельную инерционную мощность потока),}$$

$$\frac{N_n}{\gamma Q} = h_n \text{ — потери удельной мощности потока (удельной энергии),}$$

можем уравнение Бернулли представить в виде:

$$E_1 = E_2 + h_n + H_n. \quad (10-20)$$

В дальнейшем уравнение Бернулли будет применяться только для таких участков потока, в крайних живых сечениях которых давление распределяется или по гидростатическому закону¹ (фиг. 10-7)

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem},$$

или во всех точках живого сечения давление имеет одно и то же значение²

$$p = \text{idem}.$$

В связи с этим потребуется для таких сечений потока определять значения удельных энергий. Рассмотрим оба случая.

Из формулы (10-19) и (10-20) для $z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem}$ имеем:

$$E = \frac{N}{\gamma Q} = \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int_{\omega} \gamma u d\omega + \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega,$$

или в связи с (10-3) и (10-13)

$$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (10-21)$$

Для этого случая уравнение Бернулли (10-20) может быть переписано в виде: для неустановившегося движения

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^l \beta \frac{dv}{dt} dl + h_n \quad (10-22)$$

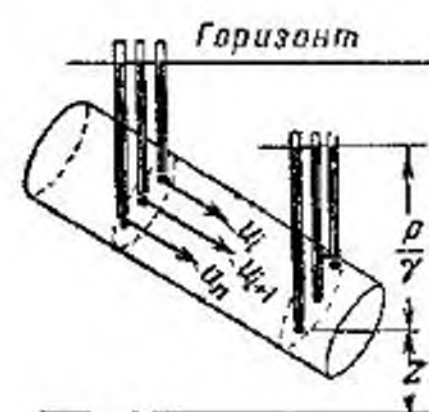
и для установившегося движения

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_n. \quad (10-23)$$

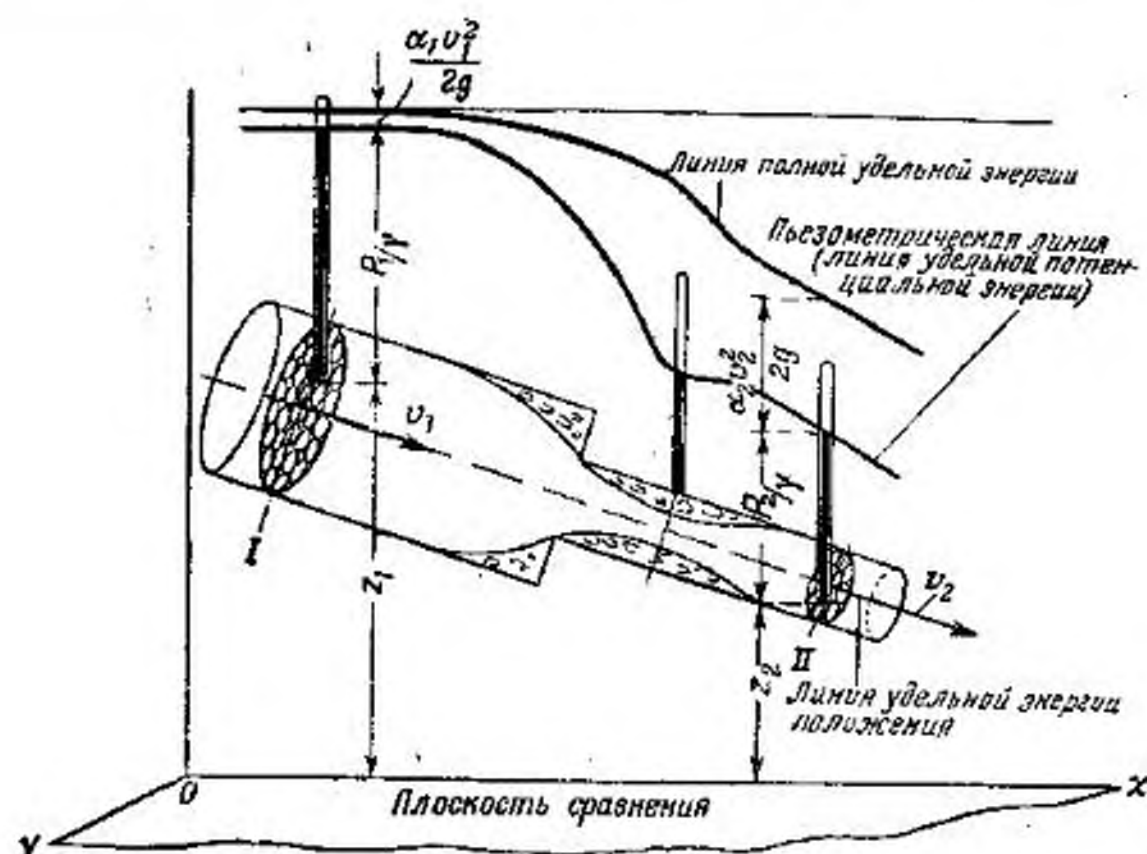
В формулах (10-22) и (10-23) p_1 и p_2 суть абсолютные давления в двух произвольно взятых точках в сечениях ω_1 и ω_2 с координатами z_1 и z_2 (фиг. 10-8).

¹ Укажем, что, как это следует из уравнения (8-29), гидростатический закон распределения давлений имеет место только в прямолинейном движении, т. е., строго говоря, только в ламинарном движении, однако приближенно такой закон принято распространять и на осредненное прямолинейное турбулентное движение.

² Например, свободная поверхность жидкости в резервуаре или сечение свободной струи.



Фиг. 10-7. При гидростатическом распределении давлений в живом сечении потока уровни в пьезометрах достигают одной и той же высоты, но разной в разных живых сечениях.



Фиг. 10-8. Диаграмма уравнения Бернулли для реального установившегося потока, ограниченного сечениями с гидростатическим распределением давления.

В связи с уравнением (10-22) заметим, что в неустановившемся движении влияние инерционного напора в потоке на энергию потока проявляется так же, как и в элементарной струйке (§ 8-6).

В том случае, если в рассматриваемом сечении $p = idem$, для вычисления E необходимо уметь вычислить, кроме интеграла K , интеграл $\gamma \int z dQ$, т. е. находить центр массы, соответствующий секунднему расходу. Этот интеграл может быть выражен через z_T — координату центра тяжести площади живого сечения

$$\gamma \int z dQ = \xi \gamma z_T Q,$$

где ξ — коэффициент, определяемый по формуле

$$\xi = \frac{\int z dQ}{z_T Q}. \quad (10-24)$$

Если в обоих живых сечениях, ограничивающих рассматриваемую длину потока, $p = idem$, то уравнение Бернулли должно быть представлено в виде:

$$\xi_1 z_{T1} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \xi_2 z_{T2} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^l \beta \cdot \frac{\partial v}{\partial t} dl + h_n \quad (10-25)$$

и для установившегося движения —

$$\xi_1 z_{T1} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \xi_2 z_{T2} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_n. \quad (10-26)$$

На фиг. 10-8 построена диаграмма уравнения Бернулли для участка установившегося потока реальной жидкости, ограниченного сечениями с гидростатическим законом распределения давления. Диаграмма строится аналогично диаграмме уравнения Бернулли для элементарной струйки. При этом значения величин z и p в каждом сечении должны соответствовать обязательно одной и той же точке¹.

В уравнении Бернулли остался совершенно несвязанным член, определяющий потери удельной энергии в потоке, обусловленные гидравлическими сопротивлениями; этот вопрос будет рассмотрен в соответствующих местах учебника.

Следует обратить внимание на тот факт, что обязательное падение линии полной удельной энергии в общем случае не вызывает обязательного падения линии полной потенциальной энергии (пьезометрической линии). Эта линия на отдельных участках может и повышаться, что зависит от конфигурации потока.

Падение линии полной удельной энергии характеризуется так называемым гидравлическим уклоном

$$J = - \frac{d}{dl} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right). \quad (10-27)$$

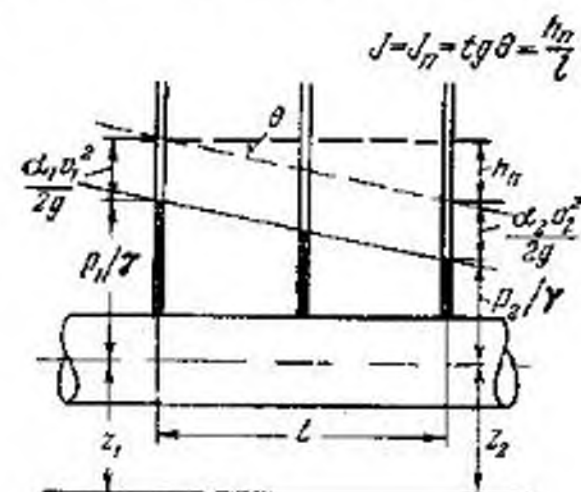
Гидравлический уклон можно рассматривать как потери удельной энергии потока, отнесенные к единице длины потока.

Форма пьезометрической линии характеризуется пьезометрическим уклоном

$$J_n = - \frac{d}{dl} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right). \quad (10-28)$$

Пьезометрический уклон можно рассматривать также как изменение потенциальной энергии потока, отнесенное к единице длины потока.

¹ При построении диаграммы отклонением от гидростатического закона распределения давлений в промежуточных сечениях пренебрегаем, что, однако, не всегда допустимо.



Фиг. 10-9. Диаграмма уравнения Бернулли для равномерного реального установившегося потока.

Отметим, что гидравлический уклон J всегда положителен, в то время как пьезометрический — J_n в зависимости от конфигурации потока может быть и положительным и отрицательным.

В потоке с одинаковой скоростью по длине (фиг. 10-9)

$$v = \text{idem};$$

$$J = J_n = -\frac{d}{dl} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right). \quad (10-29)$$

10-8. Примеры гидравлических расчетов установившихся и неустановившихся потоков без учета гидравлических сопротивлений

Оставляя пока без рассмотрения вопрос об определении потери удельной энергии вследствие сопротивлений, возникающих в жидкости при движении, разберем несколько примеров без учета этих потерь. В таких случаях основными уравнениями являются уравнения Бернулли для потока, но без учета потерь энергии и уравнение неразрывности.

Напомним, что при применении уравнения Бернулли в форме (10-22) и (10-23) поток в общем случае может иметь по длине сложную конфигурацию, однако в сечениях, которые ограничивают длину рассчитываемого участка потока, давления должны распределяться по гидростатическому закону. Необходимо также, чтобы значения z и p в каждом сечении соответствовали одной и той же точке.

Задача 10-1. Построить диаграмму Бернулли, пренебрегая сопротивлением, для водовода при следующих условиях.

Система состоит из резервуара и трубы переменного сечения, оканчивающейся конически сходящейся короткой трубкой (фиг. 10-10).

1. Высота уровня воды в резервуаре над выходным отверстием $h=25$ м. На свободной поверхности давление равно атмосферному.

2. Диаметры трубы: $d_1=0,053$ м; $d_2=0,100$ м; $d_3=0,062$ м; $d_4=0,040$ м.

Решение.

При закрытой трубе, т. е. в случае покоя жидкости, полная удельная энергия жидкости равна сумме удельной потенциальной энергии положения и давления.

Так как все точки покоящейся жидкости обладают одинаковой энергией, то ее легче всего определить по точке, находящейся на свободной поверхности воды в резервуаре. Плоскость сравнения выберем проходящей через центр выходного отверстия. Очевидно, эта энергия равна:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} = 35 \text{ м},$$

где $z = h = 25$ м; $\frac{p}{\gamma} = 10$ м (принимая давление атмосферы равным $10\,000 \text{ кг/м}^2$, а $\gamma = 1\,000 \text{ кг/м}^3$).

Линия энергии для покоящейся жидкости будет горизонтальной прямой (показана пунктиром), расположенной на высоте 35 м. Статическое давление

в любом сечении трубы будет определяться столбом жидкости высотой $\frac{p}{\gamma}$, который на диаграмме представит отрезком, заключенным между пунктирной линией энергии и осью трубопровода в соответствующем сечении трубы.

В случае движения положение пьезометрической линии изменится. Для построения диаграммы необходимо определить скорость течения жидкости в различных частях водовода. Сначала определяем скорость в сечении на выходе.

Для этой цели сначала напишем уравнение Бернулли для двух сечений: первое сечение $(0-0)$ выбираем на свободной поверхности воды в резервуаре; второе $(4-4)$ — в плоскости выходного отверстия.

В рассматриваемом случае в сечении $0-0$ давления распределяются по гидростатическому закону, а в сечении $4-4$ давление $p = \text{idem}$.

Поэтому уравнение Бернулли должно быть представлено в виде:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = \xi_4 z_4 + \frac{p_4}{\gamma} + \frac{\alpha_4 v_4^2}{2g}.$$

Определим значение каждого из членов уравнения Бернулли.

В рассматриваемом случае коэффициенты α_4 и ξ_4 можно принять равными единице

$$\xi_4 = 1; \quad \alpha_4 = 1,$$

а плоскость сравнения принять, как показано на фигуре. При этом

$$z_0 = h = 25 \text{ м}; \quad z_4 = 0; \quad v_0 = 0;$$

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{10\,000}{1\,000} = 10 \text{ м}; \quad \frac{p_4}{\gamma} = \frac{10\,000}{1\,000} = 10 \text{ м}.$$

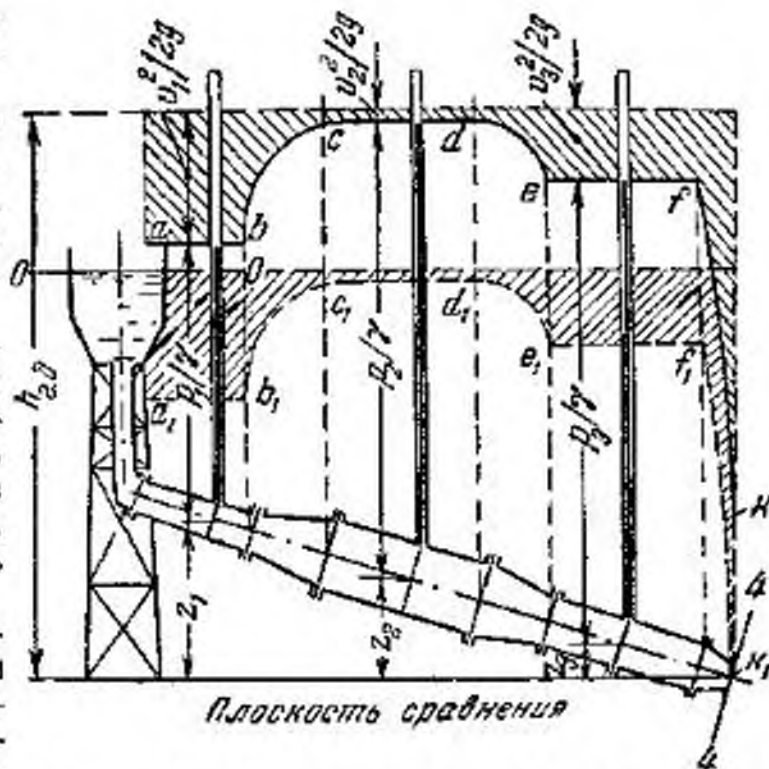
(давление на выходе из трубы в атмосферу принимаем равным атмосферному).

Подставляя найденные значения в уравнение Бернулли, получаем:

$$h = \frac{v_4^2}{2g},$$

откуда

$$v_4 = \sqrt{2g \cdot 25} = 22,15 \text{ м/сек.}$$



Фиг. 10-10. Диаграмма уравнения Бернулли. К задаче 10-1.

Применяя уравнение неразрывности, определим скорости и в остальных сечениях трубы:

$$v_3 = v_4 \left(\frac{d_4}{d_3} \right)^2 = 22,15 \cdot \left(\frac{0,040}{0,062} \right)^2 = 9,215 \text{ м/сек};$$

$$v_2 = v_4 \left(\frac{d_4}{d_2} \right)^2 = 22,15 \left(\frac{0,040}{0,100} \right)^2 = 3,544 \text{ м/сек};$$

$$v_1 = v_4 \left(\frac{d_4}{d_1} \right)^2 = 22,15 \left(\frac{0,040}{0,053} \right)^2 = 12,616 \text{ м/сек}.$$

Так как сопротивления нами не учитываются (жидкость рассматривается идеальной), то гидродинамический напор (полная удельная энергия) вдоль потока остается величиной постоянной, т. е. линия гидродинамического напора будет горизонтальна.

Положение этой линии определится, если будет известен гидродинамический напор какой-либо точки, например точки, расположенной на поверхности жидкости в резервуаре:

$$H_{z_0} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}.$$

Так как $v_0 \approx 0$,

$$H_{z_0} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = 25 + 10 = 35 \text{ м}.$$

Таким образом, линия полной удельной энергии (гидродинамического напора) расположится в горизонтальной плоскости на высоте $H_{z_0} = 35 \text{ м}$ над плоскостью сравнения. Для построения пьезометрической линии (линия потенциальной удельной энергии) вычислим скоростные напоры:

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{12,616^2}{2 \cdot 9,81} = 8,169 \text{ м}; \quad \frac{v_3^2}{2g} = \frac{9,215^2}{2 \cdot 9,81} = 4,330 \text{ м};$$

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{3,544^2}{2 \cdot 9,81} = 0,639 \text{ м}; \quad \frac{v_4^2}{2g} = \frac{22,150^2}{2 \cdot 9,81} = 25 \text{ м}.$$

При построении диаграммы допускаем, что во всех сечениях площадь живого сечения определяется по соответствующему диаметру трубопровода.

Отложив вниз от линии полной удельной энергии значения скоростного напора, имея при этом в виду, что в трубе на участках с постоянным сечением скоростной напор имеет одно и то же значение, получим пьезометрически линию (линию $abcdefk$).

Линия геометрического напора (удельной энергии положения) совпадает с осью трубопровода.

В любом сечении гидродинамическое давление определяется вертикальным отрезком, заключенным между линией геометрического напора и пьезометрической линией. Здесь следует отметить, что изображенное на диаграмме давление есть давление абсолютное. Для избыточного давления линия полной удельной энергии и пьезометрическая линия расположатся соответственно ниже на 10 м, как показано пунктиром, т. е. линия полной удельной энергии расположится горизонтально в плоскости свободной поверхности жидкости в резервуаре на высоте 25 м над плоскостью сравнения, а пьезометрическая линия изобразится линией $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 k_1$.

Задача 10-2. Закон движения жидкости в трубопроводе, присоединенном к воздушному колпаку (без учета гидравлических сопротивлений).

Рассмотрим движение жидкости в трубе длиной L постоянного сечения ω , присоединенной к воздушному колпаку (фиг. 10-11). Объем W воздушного колпака заполнен сжатым воздухом или каким-либо другим газом.

В положении покоя уровень жидкости в трубопроводе находится на высоте z_0 над начальным уровнем жидкости в воздушном колпаке. Это положение назовем равновесным положением. Этому положению в газовом пространстве колпака соответствует давление $p_0 = p_{atm} + \gamma \cdot z_0$, объем газа W_0 , $y = 0$.

Переместим принудительно столб жидкости на l_0 . Благодаря этому давление в газовом пространстве увеличится соответственно уменьшению объема.

Изменение давления будет подчиняться закону

$$p W = p_0 W_0 = C,$$

откуда

$$\frac{dp}{dW} = -\frac{C}{W^2} = -\frac{p_0 W_0}{W^2} \approx -\frac{p_0}{W_0}.$$

Имея в виду, что

$$dW = -F_K dy,$$

где F_K — площадь сечения воздушного колпака;

dy — уменьшение высоты газового пространства в колпаке, получим:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p_0 F_K}{W_0},$$

интегрируя, найдем:

$$\int_{p_0}^{p_K} dp = \int_0^y \frac{p_0 F_K}{W_0} dy,$$

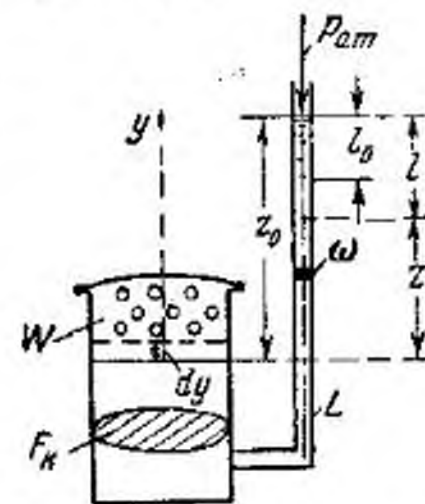
или

$$p_K = p_0 + \frac{p_0 F_K}{W_0} y,$$

где p_K — переменное давление в газовом пространстве колпака, соответствующее уровню жидкости в нем.

Если теперь предоставить жидкость самой себе, то газовая подушка, выполняя роль пружины, в дальнейшем заставит жидкость, предоставленную самой себе, двигаться к равновесному положению. Благодаря инерции столб жидкости в равновесном положении не остановится и будет продолжать двигаться в том же направлении, т. е. от колпака. Это вызовет уменьшение давления в колпаке по сравнению с p_0 и при $p_{atm} = \text{const}$ заставит жидкость двигаться с замедлением вплоть до остановки. Движение, если пренебречь сопротивлением, будет подчиняться уравнению Бернулли (10-22) и (10-25) для неустановившегося движения (при $\xi = 1$, а $h_n = 0$):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^L \xi \frac{dv}{dt} dl.$$



Фиг. 10-11. Трубопровод, присоединенный к воздушному колпаку. К задаче 10-2.

Если пренебречь массой жидкости в колпаке и скоростными напорами, последнее уравнение для некоторого промежуточного положения, характеризующегося координатами свободных поверхностей $z_1 = y$ и $z_2 = z$ и соответственно $p_1 = p_k$ и $p_2 = p_{atm}$ может быть представлено в виде:

$$y + \frac{p_k}{\gamma} = z + \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{\beta L}{g} z'',$$

где L — длина колеблющегося столба жидкости в трубе, а

$$z'' = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Имея в виду, что

$$z = z_0 - l, \text{ а } z'' = -l'',$$

где l — координата, определяющая положение свободного уровня в трубопроводе от его начального, а l'' — вторая производная по времени, получим:

$$y + \frac{p_k}{\gamma} = z_0 - l + \frac{p_{atm}}{\gamma} - \frac{\beta L}{g} l''.$$

Подставляя значение p_k , будем иметь:

$$y + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{p_0 F_k}{\gamma W_0} y = z_0 - l + \frac{p_{atm}}{\gamma} - \frac{\beta L}{g} l''.$$

Имея в виду, что $p_0 = p_{atm} + \gamma z_0$, найдем:

$$y + \frac{p_0 F_k}{\gamma W_0} y = -l - \frac{\beta L}{g} l''.$$

Последнее можно преобразовать, учитывая, что

$$y = \frac{l\omega}{F_k}.$$

При этом получим:

$$\frac{\beta L}{g} l'' + l \left(1 + \frac{\omega}{F_k} + \frac{p_0 \omega}{\gamma W_0} \right) = 0.$$

Примем длину жидкого столба $L = \text{const}$, что вполне допустимо для длинного столба, и обозначим:

$$\frac{g}{\beta L} \left(1 + \frac{\omega}{F_k} + \frac{p_0 \omega}{\gamma W_0} \right) = k^2,$$

тогда

$$l'' + k^2 l = 0.$$

Полученное дифференциальное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение гармонического колебательного движения.

Интеграл этого уравнения

$$l = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt),$$

где t — время;

k — частота колебаний.

Постоянные интегрирования определим по начальным данным при $t = 0$; $l = l_0$, откуда $C_1 = l_0$ при $t = 0$, $l' = 0$, откуда $C_2 = 0$; тогда

$$l = l_0 \cos(kt).$$

Таким образом, при сделанных допущениях столб жидкости в трубопроводе будет совершать гармоническое колебательное движение с частотой k и с амплитудой l_0 , равной начальному смещению столба жидкости.

Задача 10-3. Определить предельное число двойных ходов поршневого насоса (фиг. 10-12), перекачивающего бензин, согласно следующим данным:

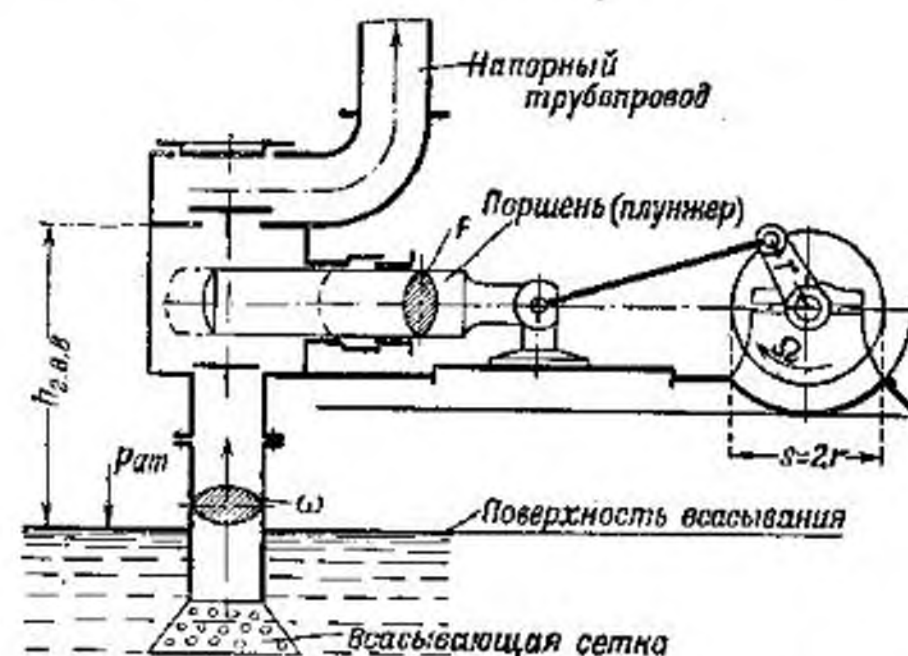
объемный вес бензина $\gamma = 750 \text{ кг/м}^3$;

давление парообразования $p_{II} = 1925 \text{ кг/м}^2$;

геометрическая высота всасывания $h_{г.в.в} = 5 \text{ м}$;

сопротивление всасывающего клапана его открытию $h_{к.в} = 2 \text{ м}$;

длина и диаметр всасывающего трубопровода $l = 10 \text{ м}$; $d = 0,1 \text{ м}$. Радиус кривошипа $r = 0,1 \text{ м}$. Диаметр поршня $D = 0,15 \text{ м}$.



Фиг. 10-12. Схема поршневого насоса. К задаче 10-3.

Решение. Для определения предельного числа двойных ходов поршневого насоса необходимо определить сначала давление на поршень по ходу всасывания. Затем определить давление, которое соответствует моменту начала всасывания, и приравнять это давление давлению парообразования p_{II} .

Для определения давления на поршень по ходу всасывания воспользуемся уравнением (10-22), принимая $\beta = 1$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} dl + h_n.$$

Инерционный напор учитываем только во всасывающем трубопроводе, длина которого l , и не учитываем в насосной камере.

$z_2 - z_1 = h_{г.в.в}$ — геометрическая высота всасывания;

$p_1 = p_{atm}$ — давление на свободной поверхности всасывания;

$v_2 = v_{по ходу вс}$ — давление жидкости на поршень по ходу всасывания;

$v_1 = 0$ — скорость на свободной поверхности всасывания;

$v = \frac{Fv_n}{\omega}$ — скорость жидкости во всасывающем трубопроводе согласно уравнению неразрывности, считая что жидкость не отрывается от поршня;

$v_2 = v_n = r\Omega \sin \Omega t$ — скорость поршня при „бесконечно длинном“ шатуне;

$\Omega = \frac{\pi n}{30}$ 1/сек. — угловая скорость кривошипа;

F — площадь поршня;

ω — площадь сечения всасывающего трубопровода;

$$\int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} dt = \frac{1}{g} \frac{F}{\omega} \int_0^l \frac{\partial v_n}{\partial t} dt = \frac{1}{g} \frac{F}{\omega} \frac{\partial v_n}{\partial t} \int_0^l dt = \frac{1}{g} \frac{Fl}{\omega} \frac{\partial v_n}{\partial t};$$

$\frac{\partial v_n}{\partial t} = r\Omega^2 \cos \Omega t$ — ускорение поршня, соответствующее „бесконечно длинному“ шатуну.

Подставляя значения, найдем:

$$\frac{P_{\text{по ходу вс}}}{\gamma} = \frac{P_{\text{ат}}}{\gamma} - h_{z.s.s} - \frac{2v_n^2}{2g} - h_n - \frac{1}{g} \frac{Fl}{\omega} r\Omega^2 \cos \Omega t.$$

Наименьшее давление соответствует началу хода всасывания ($\cos \Omega t = 1$ и $v_n = 0$). Поэтому

$$\frac{P_{\text{по ход.вс.мин}}}{\gamma} = \frac{P_{\text{ат}}}{\gamma} - h_{z.s.s} - h_n - \frac{1}{g} \frac{Flr}{\omega} \Omega^2.$$

В последнем выражении из потерь удельной энергии остается лишь потеря, связанная с преодолением сопротивления клапана его открытию ($h_n = h_{кл}$). Все остальные члены, определяющие потери как зависящие от скорости (так как скорость в начале всасывания равна нулю), равны нулю.

Приравняв $P_{\text{по ход.вс.мин}}$ давлению парообразования $P_{\text{п}}$, найдем:

$$\Omega^2 = \left(\frac{\pi n_{\text{пред}}}{30} \right)^2 = \left(\frac{P_{\text{ат}} - P_{\text{п}}}{\gamma} - h_{z.s.s} - h_{кл} \right) \cdot \frac{Flr}{g\omega},$$

откуда для метровых размеров

$$n_{\text{пред}} = 30 \sqrt{\frac{\frac{P_{\text{ат}} - P_{\text{п}}}{\gamma} - h_{z.s.s} - h_{кл}}{\frac{Flr}{\omega}}} = 33 \text{ дв. ход./мин.}$$

Глава одиннадцатая

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

11-1. Гидравлическое моделирование

Моделированием называется исследование явлений на моделях. Сущность моделирования заключается в том, что на модели меньшего, а иногда и большего масштаба создается гидравлическое явление, подобное явлению, которое имеет место или должно возникнуть в натуре, что и позволяет изучить это явление. Основной задачей теории моделирования является выявление

условий, обеспечивающих подобие явлений. Явления называются подобными, если по известным характеристикам одного явления можно получить простым пересчетом аналогичные характеристики другого явления.

Одним из существеннейших достоинств метода моделирования является возможность обобщения результатов единичного опыта на целый класс явлений. Этот метод, например, позволит результаты исследований движения воды обобщить на случай движения воздуха, масла и т. п., или наоборот. Даже больше, он позволяет распространить результаты исследования явления одного класса на явления другого класса, но описываемые одинаковыми математическими уравнениями. Метод моделирования обеспечивает наиболее рациональную организацию исследования, значительно сокращая тем самым объем экспериментальных работ, а значит и затраты средств, особенно, если исследования происходят на моделях меньших натур.

Научной базой метода моделирования является теория подобия, переплетающаяся с методами теории размерностей.

11-2. Основные законы подобия. Критерий подобия Ньютона

Одним из важнейших условий, которым должны удовлетворять подобные явления, является так называемое геометрическое подобие.

Явления будут геометрически подобны, если существует геометрическое подобие размеров потока натуре и модели. Под этим понимают подобие размеров каналов, в которых протекает поток натуре и модели, подобие шероховатостей стенок, ограничивающих поток, в открытых потоках подобие свободных поверхностей, подобие запорных приспособлений, подобие твердых тел, помещаемых в натуре и в модели.

Если обозначить какие-либо характерные величины, например длину l , диаметр d , некоторую площадь ω или некоторый объем W , относящиеся к натуре, индексом n , а к модели индексом m , то между одноименными величинами геометрически подобных систем будет существовать соотношение

$$\lambda = \frac{l_n}{l_m} = \frac{d_n}{d_m} = \frac{\sqrt{V_{\omega_n}}}{\sqrt{V_{\omega_m}}} = \frac{\sqrt[3]{W_n}}{\sqrt[3]{W_m}}. \quad (11-1)$$

Постоянная λ называется константой геометрического подобия.

В требования, предъявляемые к условиям геометрического подобия, должно быть включено взаимное и однозначное соответствие между частицами потока натуре и модели, заключающееся в том, что каждой частице потока натуре должна соответствовать частица потока модели, и наоборот.

Однако одного геометрического подобия еще недостаточно, чтобы явление было подобно. Известно, что в геометрически подобных каналах движение может быть различным. В подобных явлениях должно существовать и определенное соотношение между скоростями и ускорениями в соответственных точках, выражающееся условиями так называемого кинематического подобия.

Кинематическое подобие требует, чтобы траектории, описываемые соответствующими частицами потока природы и модели, за любые соответствующие отрезки времени были подобны с константой подобия λ . Это значит, что зависимость между уравнениями траекторий соответствующих частиц должна определяться равенствами:

$$x_n = \lambda x_m; \quad y_n = \lambda y_m; \quad z_n = \lambda z_m,$$

в которых координаты являются функциями времени.

Примем также при этом, что если соответствующие участки траекторий l_n и l_m или dl_n и dl_m соответствующие частицы проходят за время t_n и t_m или dt_n и dt_m , то отношение

$$\frac{t_n}{t_m} = \frac{dt_n}{dt_m} = \tau \quad (11-2)$$

должно быть независимым от времени и одним и тем же для любых соответствующих частей.

Из условий кинематического подобия следует, что отношения соответствующих участков траекторий l_n и l_m или dl_n и dl_m , или радиусов кривизны траекторий r_n и r_m , если траектории криволинейны, также находятся между собой в отношении λ , т. е.

$$\frac{l_n}{l_m} = \frac{dl_n}{dl_m} = \frac{r_n}{r_m} = \lambda.$$

Из тех же условий кинематического подобия вытекает зависимость между скоростями в соответствующих точках u_n и u_m , а именно:

$$\frac{u_n}{u_m} = \frac{\frac{dl_n}{dt_n}}{\frac{dl_m}{dt_m}} = \frac{\lambda}{\tau}. \quad (11-3)$$

Такая же зависимость должна существовать и между максимальными скоростями u_{\max} или средними скоростями v потока природы и модели, т. е. должно быть:

$$\frac{u_n}{u_m} = \frac{u_{\max n}}{u_{\max m}} = \frac{v_n}{v_m}.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_m}{v_m}.$$

Отношение $\frac{u}{v}$ можно рассматривать как безразмерную относительную скорость, т. е. как значение скорости, выраженное в системе, в которой за единицу скорости принята средняя скорость v .

Таким образом, кинематическое подобие потока требует, чтобы поля безразмерных скоростей природы и модели были бы тождественны. Впрочем это требование распространяется и на все другие одноименные величины.

Из условий кинематического и геометрического подобия вытекает зависимость между ускорениями a_n и a_m или между проекциями ускорений (например, между проекциями на нормаль, т. е. между нормальными ускорениями $\frac{u^2}{r}$, если траектории криволинейны), а именно:

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{\left(\frac{u^2}{r}\right)_n}{\left(\frac{u^2}{r}\right)_m} = \frac{\lambda}{\tau^2}. \quad (11-4)$$

Материальное подобие требует взаимного соответствия между материальными частицами потока природы и модели, при этом массы соответственных частиц $M = \rho W$, где ρ — плотность, а W — объем, также должны находиться в одном и том же отношении

$$\frac{M_n}{M_m} = \frac{\rho_n W_n}{\rho_m W_m} = P \lambda^3 = m, \quad (11-5)$$

где $P = \frac{\rho_n}{\rho_m}$ — отношение плотностей, а m — константа подобия масс.

Силовое подобие требует, чтобы равнодействующие силы $F = M \bar{a}$ сил, действующих на соответствующие материальные частицы потока природы и модели в соответствующие моменты времени, также находились бы в отношении

$$\frac{F_n}{F_m} = \frac{M_n a_n}{M_m a_m} = m \lambda \tau^{-2} = \varphi, \quad (11-6)$$

где φ — константа динамического или силового подобия¹.

¹ Отношение (11-6) не теряет своего значения для подобных явлений и при переходе к предельному случаю, когда равнодействующие силы обращаются в нуль.

Из последнего следует равенство

$$\frac{F_n l_n}{M_n u_n^2} = \frac{F_m l_m}{M_m u_m^2} = Ne. \quad (11-7)$$

Величина $\frac{Fl}{Mu^2} = Ne$ называется критерием механического подобия — критерием Ньютона. Из полученного следует, что для любых двух соответственных точек подобных потоков природы и модели значения критерия механического подобия — числа Ньютона — имеют одно и то же значение, т. е.

$$Ne_n = Ne_m.$$

11-3. Критерии подобия Рейнольдса, Фруда, Эйлера и Вебера

Критерий Ньютона Ne выражает зависимость между силами, массами, скоростями и линейными размерами в динамически подобных потоках в общем виде. В гидравлике приходится иметь дело главным образом с тремя видами сил: силой веса, силой давления и силой трения. В некоторых случаях приходится принимать во внимание силы поверхностного натяжения. При этом чаще всего в различных явлениях главную роль играет только один из этих видов сил. В общем случае полного подобия необходимо иметь подобие всех сил. Однако каждый из этих видов сил требует своих условий подобия, причем иногда эти условия оказываются несовместимыми. Один такой пример будет приведен ниже. Таким образом, удовлетворить основному условию подобия — равенству критериев Ньютона — не всегда возможно. В таких случаях необходимо обеспечить подобие того вида сил, который оказывается наиболее существенным в изучаемом явлении.

Например, при исследовании законов гидравлических сопротивлений трубопроводов главную роль играют силы трения. При исследовании протекания жидкости через водосливы главную роль играют силы тяжести. Таких примеров можно было бы привести много. Критерии частичного подобия можно получить из критерия Ньютона, подставляя в него вместо силы F или силу трения $T = \mu \omega \frac{du}{dn}$, при этом получим условие подобия только сил трения (критерий Рейнольдса Re), или силу тяжести $G = Mg$ — получим условие подобия только сил тяжести (критерий Фруда — Fr), или силу давления $P = p\omega$ — условие подобия только сил давления (критерий Эйлера — Eu) и т. п.

Подставив в (11-7) силу трения T , получим:

$$\frac{\mu_n \omega_n \frac{du_n}{dn_n} l_n}{M_n u_n^2} = \frac{\mu_m \omega_m \frac{du_m}{dn_m} l_m}{M_m u_m^2}$$

Имея в виду, что $M = \rho \cdot W$, а в подобных системах

$$\frac{\omega_n l_n}{W_n} = \frac{\omega_m l_m}{W_m}$$

$$\frac{du_n}{dn_n} : u_n = \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{du_m}{dn_m} : u_m = \frac{1}{\lambda},$$

будем иметь:

$$\frac{\rho_n u_n l_n}{\mu_n} = \frac{\rho_m u_m l_m}{\mu_m},$$

где $Re = \frac{\rho u l}{\mu}$ — критерий (число) Рейнольдса.

Таким образом, подобие сил трения в потоках, удовлетворяющих условиям геометрического, кинематического и материального подобия, будет только в том случае, если для каждой пары соответственных точек потока природы и модели число Рейнольдса будет иметь одно и то же значение. В числе Рейнольдса за величину u может быть принята средняя скорость потока v , а за l — любая характерная линейная величина. Например, при изучении законов движения жидкости в трубах принимается диаметр трубы d или гидравлический радиус R . При этом число Рейнольдса будет представлено в виде:

$$Re_d = \frac{\rho v d}{\mu}; \quad Re_R = \frac{\rho v R}{\mu}. \quad (11-8)$$

Следует иметь в виду, что для подобия двух явлений существенно не численное значение критерия, а лишь его равенство для потоков природы и модели.

Подставив в (11-7) силу тяжести $G = Mg$, получим:

$$\frac{g_n M_n l_n}{M_n u_n^2} = \frac{g_m M_m l_m}{M_m u_m^2}$$

или после сокращения

$$\frac{u_n^2}{g_n l_n} = \frac{u_m^2}{g_m l_m},$$

где $Fr = \frac{u^2}{gl}$ — критерий (число) Фруда. Иногда число Фруда Fr выражают через среднюю скорость

$$Fr = \frac{v^2}{gl}. \quad (11-9)$$

Равенство чисел Фруда Fr в соответственных точках потоков, удовлетворяющих геометрическому, кинематическому и материальному подобию, обеспечивает подобие сил тяжести. За величину l может быть принята любая характерная линейная величина. Например, при изучении волнового сопротивления, которое испытывает движущийся корабль, за l принимается длина корабля.

Подставим в (11-7) силу давления $P = p\omega$. Получим:

$$\frac{P_M \omega_M l_M}{M_M u_M^2} = \frac{P_K \omega_K l_K}{M_K u_K^2},$$

имея в виду, что $M = \rho W$ и, кроме того, в геометрически подобных системах $\frac{\omega_M l_M}{W_M} = \frac{\omega_K l_K}{W_K}$, найдем:

$$\frac{P_K}{\rho_K u_K^2} = \frac{P_M}{\rho_M u_M^2},$$

где $\frac{P}{\rho u^2} = Eu$ — критерий (число) Эйлера.

Числу Эйлера придают несколько иной вид, вводя вместо абсолютного давления p разность давления δp , а именно

$$Eu = \frac{\delta p}{\rho u^2}. \quad (11-10)$$

Число Эйлера играет большую роль в исследовании явлений, связанных с кавитацией. В этом случае за δp принимается $\delta p = p - p_{II}$, где p_{II} — давление парообразования.

Число

$$k = 2Eu$$

называется числом кавитации. Таким образом, равенство чисел Эйлера обеспечивает в динамически подобных потоках подобие сил давления.

В некоторых гидравлических исследованиях существенное значение имеет поверхностное натяжение. Для получения соответствующих условий подобия можно также исходить из критерия (11-7), подставляя в него значение силы поверхностного натяжения $F = \sigma l$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения. Преобразования, не отличающиеся от предыдущих, позволяют получить число Вебера — критерий подобия сил поверхностного натяжения в виде:

$$We = \frac{\sigma}{\rho u^2 l},$$

где l — характерная линейная величина.

Выше мы уже отмечали, что полное подобие осуществить не всегда возможно. Покажем, что этого нельзя сделать во всех случаях, если для модели и для натуры применяется одна и та же жидкость. Рассмотрим один такой пример. Испытывается модель плотины при протекании через нее воды (фиг. 11-1). Примем за характерный линейный размер напор над гребнем плотины H . В этом случае числа Рейнольдса и Фруда представятся в следующем виде:

$$Re = \frac{\rho_K v_K H_K}{\mu_K} = \frac{\rho_M v_M H_M}{\mu_M}; \quad Fr = \frac{v_K^2}{g_K H_K} = \frac{v_M^2}{g_M H_M}.$$

Имея в виду, что в натуре и на модели жидкость одна и та же, у которой ρ, μ имеют одно и то же значение, получим следующие несовместимые равенства:

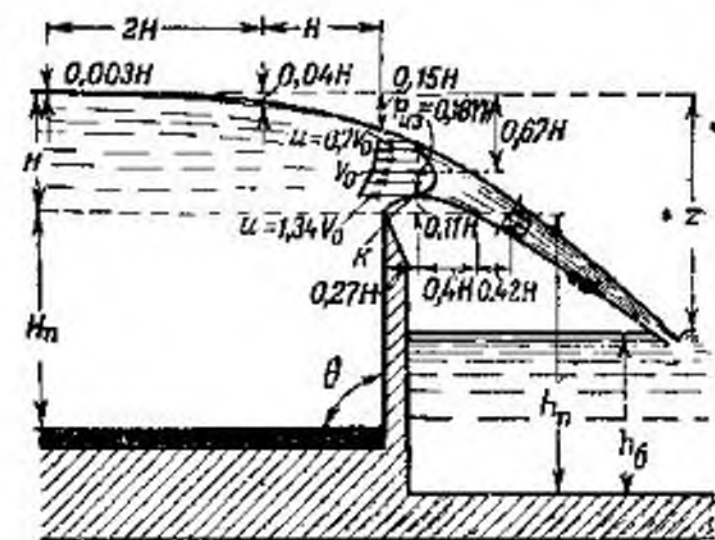
$$\frac{v_M}{v_K} = \frac{H_M}{H_K}; \quad \frac{v_K}{v_M} = \sqrt{\frac{H_K}{H_M}}.$$

По первому равенству уменьшение модели в λ раз потребует увеличение скорости протекания жидкости через модель в λ раз,

а по второму равенству — уменьшение скорости протекания в $\sqrt{\lambda}$ раз. Ввиду того, что существенное значение при моделировании водослива играют силы тяжести, очевидно, режим работы модели необходимо подчинить тяжести. Если бы можно было изменять вязкость жидкости на модели, то при известных условиях можно было бы обеспечить условия подобия и сил тяжести и сил трения.

Заметим, что весьма часто не удается осуществить полное подобие и вследствие трудностей создания подобия шероховатостей поверхностей.

В результате тех или других пренебрежений, допускаемых при моделировании, возникают погрешности при переносе на натуре результатов, полученных при исследовании модели, характеризующиеся так называемым масштабным эффектом.



Фиг. 11-1. Схема водослива с тонкой стенкой.

11-4. Применение методов теории размерности к исследованию гидравлических закономерностей

При различных гидравлических исследованиях приходится устанавливать функциональные зависимости между физическими величинами, оказывающими влияние на исследуемые явления. Например, при изучении законов гидравлического сопротивления жидкости при движении ее по трубопроводу разыскивается зависимость падения давления δp от скорости движущейся жидкости v , плотности ρ , вязкости μ , длины l , диаметра d и высоты выступов шероховатости Δ стенок трубопровода, а именно:

$$\delta p = f(v, \rho, \mu, d, l, \Delta).$$

При изучении движения жидкости через плотину (водослив) разыскивается зависимость расхода G [$\text{кг}/\text{сек}$] в виде функции

$$G = f(\rho, g, b, H),$$

где H — напор над гребнем водослива;
 b — ширина водослива.

Можно было бы привести множество аналогичных примеров. Во всех них исследуемая величина (обозначим ее через N) чаще всего размерная, выражается через другие физические величины, которые будем обозначать через n_i . В общем виде функциональная зависимость N может быть представлена в виде:

$$N = f(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k), \quad (11-11)$$

где n_i — все различные физические и геометрические величины, являющиеся характерными для данного исследования.

В общем случае в функциональную зависимость, включая и величину N , входят $k+1$ величин. Некоторые из $k+1$ величин N и n_i ($i=1, 2, \dots, k$) могут быть переменными, другие постоянными; некоторые могут быть размерными, другие отвлеченными. Но при всех условиях функциональная зависимость N должна быть независимой от выбора системы единиц измерения, так как эта зависимость выражает физический закон. От выбора системы единиц измерения будет зависеть лишь численное значение величин N или n_i . Таким образом, в выборе единиц измерения может быть допущено отступление от общепринятых единиц. Необходимо только, чтобы единицы измерения были по своим размерностям независимыми, т. е. чтобы размерности любой из них нельзя было получить из комбинации размерностей других величин и их число должно позволить выразить через них размерности всех других величин, входящих в функциональную зависимость N . При гидравлических исследованиях оказывается

целесообразным за основные единицы измерения принять следующие три величины, имеющие независимые размерности:

1. Скорость u какой-либо частицы потока или среднюю скорость потока в каком-либо сечении v .

2. Какую-либо характерную длину, например диаметр трубопровода d , длину трубопровода l или длину корабля. С таким же успехом можно было бы принять $\sqrt{\omega}$, где ω — характерная площадь. Можно было бы также принять вместо l за основную единицу не длину, а площадь ω .

3. Плотность жидкости ρ .

Размерность этих основных единиц измерения в технической системе $[v] = \text{м}/\text{сек}$; $[l] = \text{м}$; $[\rho] = \text{кг}/\text{сек}^2/\text{м}^3$.

Через основные величины можно выразить размерность любой величины, входящей в функциональные зависимости, исследуемые в большинстве случаев в гидравлике. При подобном выборе единиц измерения размерности всех остальных ($k+1-3$) различных величин N и n_i ($i=1, 2, 3, \dots, k-3$), входящих в функциональную зависимость, могут быть выражены в виде произведения некоторых степеней основных единиц, а именно:

$$[N] = [v]^x \cdot [l]^y \cdot [\rho]^z; [n_i] = [v]^{x_i} \cdot [l]^{y_i} \cdot [\rho]^{z_i}.$$

Численное значение величин N и n_i в системе единиц (например, в системе метр, секунда, килограмм-сила) может быть найдено как произведение некоторого отвлеченного числа π или π_i на произведение степеней единиц основной системы, а именно:

$$N = \pi v^x l^y \rho^z; n_i = \pi_i v^{x_i} l^{y_i} \rho^{z_i}.$$

Значение отвлеченных чисел π и π_i можно вычислить по формулам:

$$\pi = \frac{N}{v^x l^y \rho^z}; \pi_i = \frac{n_i}{v^{x_i} l^{y_i} \rho^{z_i}}. \quad (11-12)$$

Так как величины v , l и ρ приняты за основные, то отвлеченные величины π и π_i можно рассматривать как безразмерное (относительное) значение N и n_i . Из этого следует, что относительное значение каждой из величин, входящих в функциональную зависимость, оказывается уменьшенным в $v^x l^y \rho^z$ или $v^{x_i} l^{y_i} \rho^{z_i}$ раз. Вследствие этого функциональная зависимость (11-11) может быть представлена в виде:

$$\frac{N}{v^x l^y \rho^z} = f\left(\frac{n_1}{v^{x_1} l^{y_1} \rho^{z_1}}, \frac{n_2}{v^{x_2} l^{y_2} \rho^{z_2}}, \dots, \frac{n_k}{v^{x_k} l^{y_k} \rho^{z_k}}\right). \quad (11-13)$$

Будем считать, что n_k, n_{k-1} и n_{k-2} соответственно равны v, l и ρ . В этом случае последние три члена функциональной зависимости обращаются в единицы и функциональная зависимость может быть представлена в виде:

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{k-3}, 1, 1, 1). \quad (11-14)$$

Таким образом, в общем случае функциональная зависимость между $(k+1)$ размерными величинами N и n_i может быть представлена как соотношение между $(k+1-3)$ величинами π и $\pi_i (i=1, 2, 3, \dots, k-3)$, каждая из которых есть безразмерная степенная комбинация величин, входящих в функциональную зависимость. Эта теорема называется π -теоремой. Можно показать, что если в функциональную зависимость входят коэффициент вязкости μ , поверхностного натяжения σ , ускорение силы тяжести g или давление δp , то соответствующие им величины π_i обратны или совпадают с критериями подобия Рейнольдса, Вебера, Фруда и Эйлера.

Равенство безразмерных величин π_i в подобных потоках выражает равенство относительных значений соответствующих физических величин, почему эти величины могут рассматриваться как критерии подобия.

11-5. Гидравлические сопротивления. Принцип наложения потерь энергии

Исследование гидравлических сопротивлений возможно лишь в установившемся движении. Для неустановившегося движения не существует способов их определения, и поэтому в гидравлике принято результаты исследований сопротивлений установившегося движения переносить и на неустановившееся движение.

Определение потерь энергии является одним из важнейших вопросов почти любого гидравлического расчета. В гидравлических расчетах приходится иметь дело с двумя видами потерь: с потерями энергии по длине трубопроводов и с потерями в местных сопротивлениях. К потерям энергии по длине трубопроводов относятся потери энергии на прямолинейных участках трубопроводов, а к потерям энергии в местных сопротивлениях — потери на таких участках трубопроводов, где имеет место нарушение нормальной конфигурации потока. При этом за нормальную конфигурацию потока принимается конфигурация потока на прямолинейном участке трубопровода на расстояниях, достаточно удаленных от входа. Таким образом, всевозможные входы в трубопровод, расширения и сужения трубопроводов, вентили, клапаны и т. п. представляют собой так называемые местные сопротивления.

Особенность явлений, возникающих в местных сопротивлениях, заключается в том, что при протекании жидкости через них всегда появляются так называемые поверхности раздела, являющиеся границами масс жидкости, участвующих в различных движениях. Например, при протекании через внезапное расширение (фиг. 15-6) такими поверхностями являются $b-m$ и $c-n$. Поверхности раздела весьма неустойчивы. Частицы жидкости, образующие эти поверхности, быстро свертываются в вихри. Вследствие вязкости и деформации движение этих вихрей затухает, а их энергия преобразуется необратимым образом в тепловую. Эта часть энергии и рассматривается как потери, обусловленные местными гидравлическими сопротивлениями.

Заметим, что в общем случае трубопровод представляет совокупность большого числа разнообразных гидравлических сопротивлений. Сам трубопровод может состоять из участков с различными диаметрами. На нем смонтированы различные запорные устройства, фильтры, расходомеры и т. п. При определении общей потери удельной энергии, что необходимо при гидравлических расчетах, исходят из так называемого принципа наложения потерь. Сущность этого принципа заключается в том, что полная потеря удельной энергии складывается из арифметической суммы потерь, вызванных каждым сопротивлением в отдельности. Конечно, подобный способ определения потерь в отдельных случаях будет грешить некоторой неточностью, ввиду того, что каждое сопротивление, создавая соответствующее возмущение в потоке на смежных к нему участках, тем самым изменяет нормальное сопротивление этих участков. Особенно это относится к потерям энергии в местных сопротивлениях, если они расположены вблизи друг от друга.

Прежде чем описать экспериментальные приемы исследования гидравлических сопротивлений, покажем, каким образом можно использовать теоретические предпосылки для установления вида интересующих нас функциональных зависимостей.

Применим π -теорему для выявления функциональной зависимости для закона потерь удельной энергии на участке цилиндрической трубы длиной l и диаметром d .

Экспериментальные исследования этого вопроса, включающие производственный опыт, показывают, что потери удельной энергии, в данном частном случае характеризующиеся только падением давления δp по длине трубопровода (см. фиг. 10-9), зависят от средней скорости движения v , диаметра трубы d , ее длины l , шероховатости Δ , вязкости жидкости μ и плотности ρ .

Таким образом, в общем виде функциональная зависимость для δp может быть представлена в виде:

$$\delta p = f(\mu, l, \Delta, \rho, v, d). \quad (11-15)$$

Примем за независимые единицы измерения ρ , v и d . В этом случае функциональную зависимость можно представить согласно (11-13) в виде:

$$\frac{\delta p}{v^x d^y \rho^z} = f\left(\frac{\mu}{v^x d^y \rho^z}, \frac{l}{v^x d^y \rho^z}, \frac{\Delta}{v^x d^y \rho^z}, 1, 1, 1\right),$$

или согласно (11-14) в виде:

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, 1, 1, 1),$$

где

$$\delta p_{кг/м^2} = \pi (v_{м/сек})^x (d_{м})^y (\rho_{кг/сек^2/м^3})^z;$$

$$\mu_{кг/сек/м^2} = \pi_1 (v_{м/сек})^{x_1} (d_{м})^{y_1} (\rho_{кг/сек^2/м^3})^{z_1};$$

$$l_{м} = \pi_2 (v_{м/сек})^{x_2} (d_{м})^{y_2} (\rho_{кг/сек^2/м^3})^{z_2};$$

$$\Delta_{м} = \pi_3 (v_{м/сек})^{x_3} (d_{м})^{y_3} (\rho_{кг/сек^2/м^3})^{z_3}.$$

Показатели степени при v , d и ρ определим сравнением размерностей левой и правой частей формул для δp , μ , l и Δ , а именно: показатели степени при $кг$

$$1 = z; 1 = z_1; 0 = z_2; 0 = z_3;$$

показатели степени при $м$

$$-2 = x + y - 4z; -2 = x_1 + y_1 - 4z_1; +1 = x_2 + y_2 - 4z_2; \\ 1 = x_3 + y_3 - 4z_3;$$

показатели степени при секундах

$$0 = -x + 2z; 1 = -x_1 + 2z_1; 0 = -x_2 + 2z_2; 0 = -x_3 + 2z_3;$$

Решая полученные системы уравнений, находим:

$$x = 2, \quad y = 0, \quad z = 1;$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 1;$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 0;$$

$$x_3 = 0, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = 0.$$

Подставляя найденные значения показателей степени в функциональную зависимость, можем представить ее в виде:

$$\frac{\delta p}{\rho v^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho d v}, \frac{l}{d}, \frac{\Delta}{d}\right).$$

Экспериментальное исследование показывает, что полученное выражение можно представить в виде:

$$\frac{\delta p}{\rho v^2} = \frac{l}{d} f\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right).$$

Обозначим функцию f через $\lambda/2$ (заметим, что это ничего общего не имеет с константой геометрического подобия):

$$\lambda = 2f\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right) \quad (11-16)$$

и через

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d}. \quad (11-17)$$

При этом получим:

$$\frac{\delta p}{\rho \frac{v^2}{2}} = \lambda \frac{l}{d} = \zeta,$$

где λ — коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода;

ζ — коэффициент потерь удельной энергии по длине.

При этом формулу для определения потерь удельной энергии $h_n = \frac{\delta p}{\gamma}$ можно представить в виде (формула Дарси):

$$h_n = \frac{\delta p}{\gamma} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}. \quad (11-18)$$

Из формул (11-16) и (11-17) следует важный результат, а именно, что в динамически подобных потоках безразмерное

падение давления $\left(\frac{\delta p}{\rho v^2}\right)$ или коэффициент λ имеют одно и то же значение независимо от рода жидкости.

Это значит, что при необходимости получить значение коэффициента λ , например для масла или воздуха для некоторого значения Re , можно эксперимент производить, например, с водой, но при том же Re . Необходимо лишь, чтобы при этом были соблюдены и другие законы моделирования.

Заметим, что приведенные выше соображения можно распространить и на местные сопротивления.

В этом случае изменится вид функциональной зависимости (11-16), в которую в зависимости от типа местного сопротивления войдут некоторые дополнительные безразмерные отношения, характеризующие форму местного сопротивления.

Формула для определения потерь удельной энергии и в этом случае могла бы быть представлена в виде:

$$h_n = \zeta_n \frac{v^2}{2g}, \quad (11-19)$$

где под ζ_n надо было бы понимать коэффициент потерь удельной энергии в местном сопротивлении, сокращенно коэффициент местного сопротивления, в отличие от предыдущего случая, где

он был назван коэффициентом потерь удельной энергии по длине. Изложенное выше подтверждается многочисленными опытами.

Подробное обоснование формул для коэффициентов λ и ζ при различных режимах движения будет приведено в соответствующих разделах курса.

Для опытного определения потерь энергии в установившемся движении в трубе может быть использована установка, изображенная на фиг. 11-2. Здесь 1 — исследуемая труба; 2 — пьезометры; 3 — ртутный дифференциальный манометр, включенный параллельно пьезометрам; 4 — мерный бак; 5 — ртутный дифференциальный манометр, присоединенный к водомеру, устанавливаемому при отсутствии мерного бака.

Исходной формулой для определения потерь является уравнение (10-23):

$$h_n = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right). \quad (11-20)$$

Если трубопровод между сечениями 1 и 2 состоит из труб разного диаметра и на нем смонтированы различные местные сопротивления, потери удельной энергии h_n на основании принципа наложения потерь могут быть представлены формулой

$$h_n = \sum \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta \frac{v^2}{2g};$$

для трубопровода одного сечения — формулой

$$h_n = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta \frac{v^2}{2g};$$

для трубопровода без местных сопротивлений — формулой

$$h_n = h_d = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

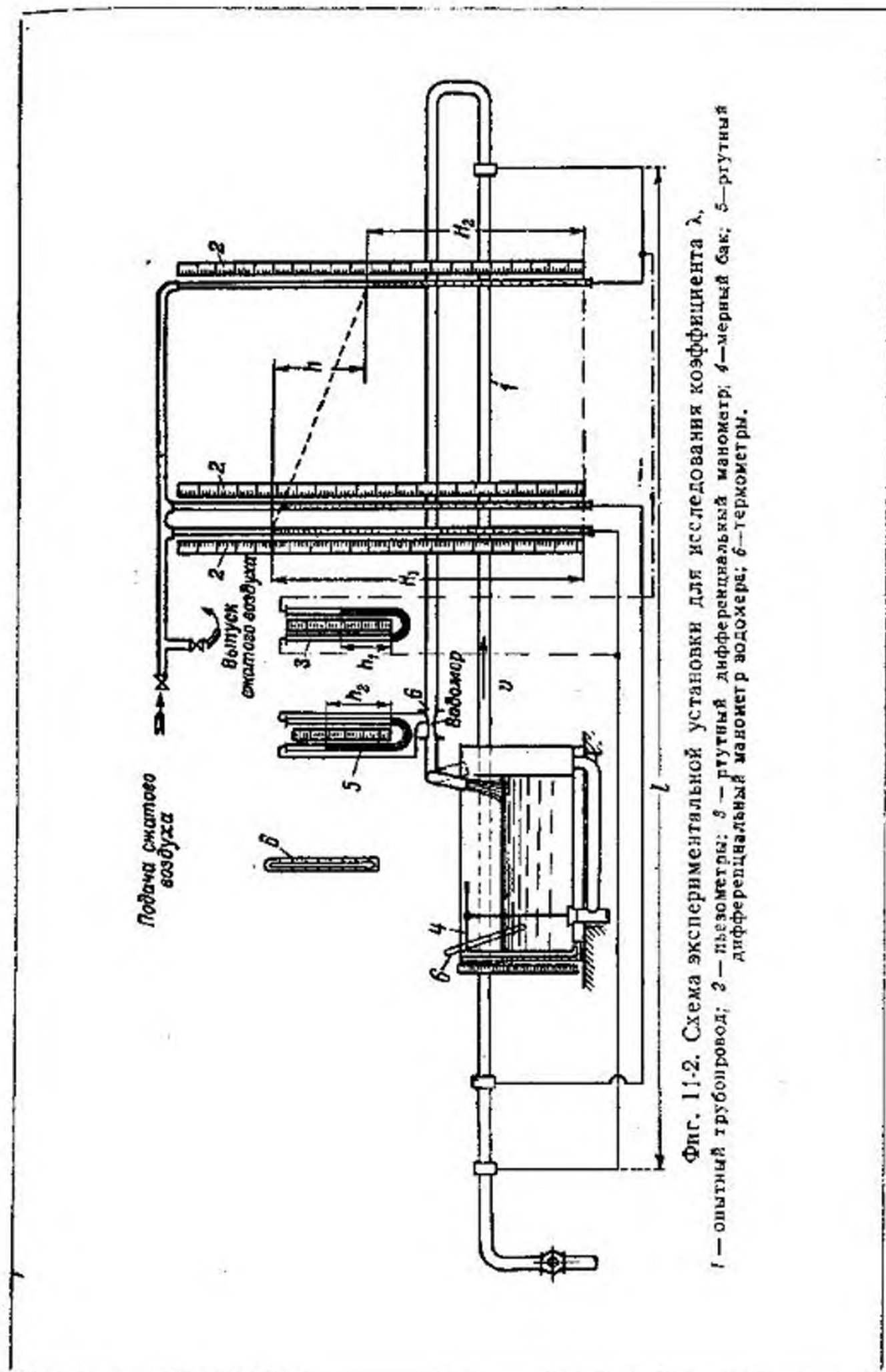
где h_d означает потери только по длине трубопровода.

Посредством пьезометров можно вычислить значения

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = h.$$

При больших значениях h применяется ртутный дифференциальный манометр. В этом случае

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = h_1 \frac{\gamma_p - \gamma}{\gamma}.$$



Фиг. 11-2. Схема экспериментальной установки для исследования коэффициента λ .

Посредством мерного бака можно определить соответствующую скорость по формуле

$$v = \frac{W}{\omega t},$$

где W — объем жидкости, протекший по трубе за время опыта t ;

ω — соответствующая площадь живого сечения потока.

Если определяются потери энергии в трубе постоянного сечения, причем на участках, на которых равны не только v , но и α , значит и $\alpha_1 v_1^2 = \alpha_2 v_2^2$, то в этом случае расчетной формулой для горизонтальной трубы является:

$$h_d = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = H_1 - H_2.$$

Глава двенадцатая

ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Общие характеристики ламинарного движения были рассмотрены в § 7-1. Там же было приведено критическое значение числа Re

$$Re_{кр} = 2320,$$

которое считается границей перехода одного режима движения в другой. Однако напомним еще раз, что в инженерной практике, особенно в коротких трубопроводах, не всегда удается сохранить ламинарное движение даже при значительно меньших значениях Re . Наличие различных устройств в трубопроводных коммуникациях уменьшает значение критического числа. Это всегда следует иметь в виду, и поэтому в расчетах со значениями Re , лежащими вблизи принятого критического значения $Re_{кр} = 2320$, надо тщательно анализировать все условия, могущие оказать влияние на режим движения.

12-1. Формирование изотермического ламинарного потока

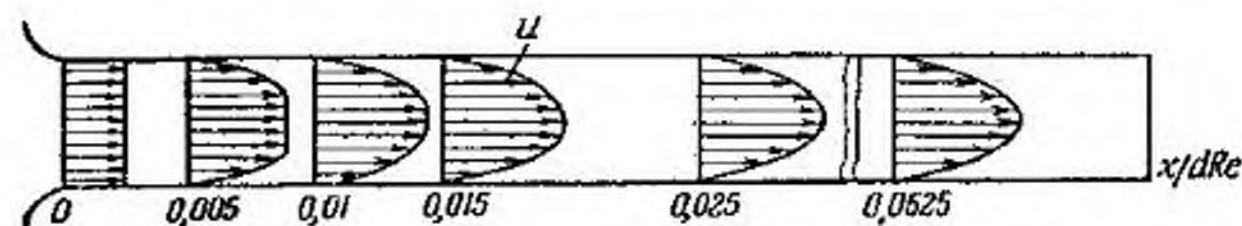
Изучение скоростей отдельных частиц жидкости по длине потока показывает, что на участке вблизи входа в трубопровод частицы движутся неравномерно, а именно: частицы, расположенные вблизи оси потока, движутся ускоренно, частицы, находящиеся ближе к стенке, замедленно. Благодаря этому эюра скоростей для разных сечений (фиг. 12-1) этого участка трубопровода не будет одинаковой.

По длине этого участка происходит формирование потока. Длина входного участка, на котором заканчивается формирова-

ние потока, называется длиной начального участка. За начальным участком движение становится равномерным.

Рассмотрим формирование ламинарного потока в трубопроводе, вход в который сделан плавным (фиг. 12-1).

Жидкость вступает в трубу с почти одинаковой скоростью по всему сечению и только у стенок скорость жидкости обращается в нуль. По мере удаления от входа толщина затормаживаемого слоя жидкости у стенки увеличивается. Но так как расход жидко-



Фиг. 12-1. Схема распределения скоростей на начальном участке установившегося ламинарного потока.

сти остается одним и тем же, то замедление движения слоев, расположенных ближе к стенкам, вызывает увеличение скорости слоев, расположенных ближе к оси трубы.

Сформировавшемуся, а значит равномерному изотермическому ламинарному потоку жидкости в круглой трубе соответствует параболический закон распределения скоростей. В этом потоке осевая скорость, являющаяся максимальной u_{max} , в 2 раза больше средней

$$u_{max} = 2v.$$

Такое распределение скоростей наступает лишь на расстоянии от входа в трубу, равном бесконечности. Но практически уже на конечных расстояниях от входа в трубу распределение скоростей мало отличается от параболического.

Теоретическое определение длины начального участка было произведено французским ученым Буссинеском еще в 1891 г.

Он считал, что формирование потока практически можно считать законченным, если скорость частицы в конце участка на оси $u_{ос}$ достигает 0,99 значения максимальной скорости u_{max} , соответствующей равномерному ламинарному потоку в круглой трубе:

$$u_{ос} = 0,99 u_{max}.$$

При этих условиях им была получена для длины начального участка l_n формула

$$l_n = 0,065 d Re. \quad (12-1)$$

В технической литературе весьма широкое распространение получила упрощенная теория начального участка, разработанная немецким ученым Шиллером, согласно которой

$$l_n = 0,02875dRe. \quad (12-2)$$

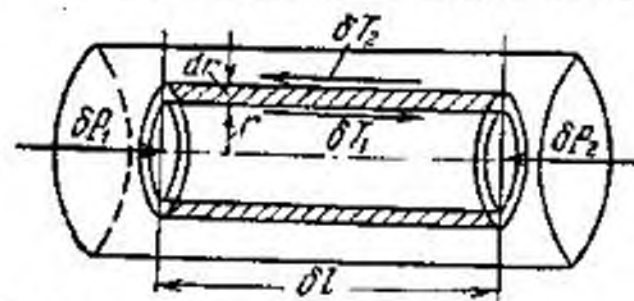
Отметим, что это значение длины начального участка соответствует по вычислениям автора в конце его скорости на оси потока $u_{ос}$, составляющей всего лишь 0,89 от $u_{max} = 2v$.

Устройство остроконечного входа ухудшает условия формирования потока. Струя жидкости, вынужденная принять при входе форму, показанную на фиг. 15-14, при последующем расширении способствует уменьшению устойчивости ламинарного потока. В таких условиях длина начального участка будет значительно больше.

Некоторые другие данные, характеризующие начальный участок, будут изложены ниже.

12-2. Дифференциальное уравнение равномерного изотермического ламинарного осесимметричного движения в трубопроводах

В ламинарном равномерном потоке, ограниченном круглыми цилиндрическими поверхностями, выделим кольцевой цилиндрический слой жидкости (фиг. 12-2) с внутренним радиусом r , толщиной dr и длиной δl .



Составим для него уравнения движения. Так как частицы рассматриваемого слоя движутся равномерно, то сумма проекций всех действующих на цилиндрический слой жидкости сил на ось должна равняться нулю. Выясним, какие силы бу-

дут проектироваться на ось движения, предполагая сначала, что ось движения горизонтальна. На внутреннюю цилиндрическую поверхность слоя будет действовать направленная в сторону движения сила трения

$$\delta T_1 = 2\pi r \delta l \tau.$$

На внешнюю цилиндрическую поверхность слоя будет действовать сила

$$\delta T_2 = \delta T_1 + \frac{\partial}{\partial r} (2\pi r \delta l \tau) dr = \delta T_1 + 2\pi \delta l \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) dr.$$

Сила δT_2 направлена в сторону, обратную движению.

На торцевые поверхности цилиндрического слоя будет действовать слева сила давления

$$\delta P_1 = 2\pi r dr p_1,$$

а справа — сила давления

$$\delta P_2 = 2\pi r dr \left(p_1 + \frac{\partial p}{\partial l} \delta l \right).$$

Составим уравнение проекций:

$$\delta T_1 - \delta T_2 + \delta P_1 - \delta P_2 = 0.$$

После подстановки найденных значений будем иметь:

$$- 2\pi \delta l \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) dr - 2\pi r dr \frac{\partial p}{\partial l} \delta l = 0,$$

откуда

$$-\frac{\partial p}{\partial l} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) = 0. \quad (12-3)$$

Поскольку в рассматриваемом случае согласно уравнению (10-27)

$$-\frac{\partial p}{\partial l} = \gamma J,$$

а согласно уравнению (2-19)

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr},$$

уравнение примет вид:

$$\gamma J + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad (12-4)$$

или если μ по сечению постоянно, т. е. от r не зависит, то

$$\gamma J + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Так как $u = u(r)$, т. е. является функцией только от r , то частные производные можно заменить на полные и уравнение переписать в виде:

$$\gamma J + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0. \quad (12-5)$$

Легко показать, что полученное уравнение (12-5) справедливо также для ламинарного изотермического равномерного и прямолинейного потока в трубопроводе, ограниченном поверхностями цилиндров, расположенными под любым углом к горизонту [в этом случае гидравлический уклон надо определить по формуле (10-28)], что следует также и из формулы (8-39).

12-3. Равномерное изотермическое ламинарное движение в круглом трубопроводе

Закон распределения скоростей в равномерном изотермическом ламинарном потоке по сечению круглой трубы может быть найден в результате интегрирования уравнения (12-5) умножением его предварительно на dr .

В изотермическом потоке гидравлический уклон J является и по сечению и по длине постоянной величиной, поэтому после интегрирования получим:

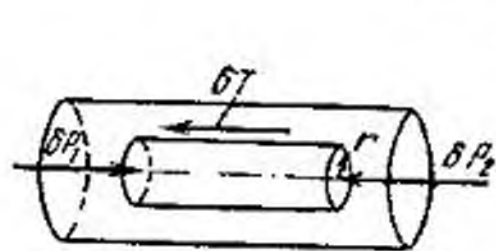
$$\gamma J \cdot \frac{r}{2} + \mu \frac{du}{dr} = C,$$

причем C — постоянная интегрирования.

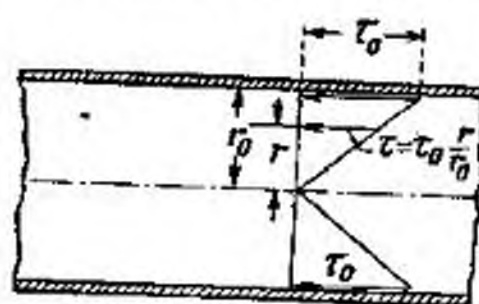
Считая распределение скоростей симметричным относительно оси, мы можем положить при $r=0$ $\frac{du}{dr} = 0$. При этом окажется, что $C=0$ и поэтому

$$\gamma J \frac{r}{2} + \mu \frac{du}{dr} = 0. \quad (12-6)$$

Заметим, что уравнение (12-6) можно получить, рассматривая движение элементарного цилиндра с радиусом r (фиг. 12-3).



Фиг. 12-3. Схема поверхностных сил, действующих на цилиндрическую часть потока.



Фиг. 12-4. Схема распределения напряжений сил трения в цилиндрической трубе.

Имея в виду, что $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$, можно на основании формулы (12-6) установить, что в рассматриваемом движении напряжение сил трения τ изменяется по живому сечению по линейному закону (фиг. 12-4) от нуля на оси до $\tau_0 = \gamma J \frac{r_0}{2}$ на стенке:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}. \quad (12-7)$$

Интегрируя уравнение (12-6) и принимая на стенке при $r=r_0$ скорость равной нулю, получим:

$$\int_0^u du = -\frac{\gamma J}{2\mu} \int_{r_0}^r r dr,$$

откуда

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2). \quad (12-8)$$

Из формулы (12-8) следует, что при равномерном изотермическом движении в круглой трубе, в поперечном сечении скорости распределяются по параболическому закону (фиг. 2-4.)

Максимальная скорость будет на оси потока (при $r=0$)

$$u_{\max} = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r_0^2 \quad (12-9)$$

Ламинарное движение является вихревым. Для доказательства этого вычислим величину угловой скорости Ω , воспользовавшись формулами (7-15) и (12-8) и имея в виду, что $r^2 = y^2 + z^2$. Из этих формул следует, что

$$\Omega_x = 0;$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot \frac{2rz}{2r} = -\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot z;$$

$$\Omega_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = +\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot \frac{2ry}{2r} = +\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot y;$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_y^2 + \Omega_z^2} = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r. \quad (12-10)$$

Максимальную угловую скорость имеют частицы, расположенные на стенках трубы, для которых $r=r_0$.

$$\Omega_{\max} = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r_0.$$

Для частиц, расположенных на оси, $r=0$, поэтому и $\Omega=0$.

Возникновение вихрей обуславливается вязкостью жидкости и может быть объяснено следующим образом. У твердой стенки скорость жидкости равна нулю. Стенка затормаживает движение. Поэтому соприкасающиеся со стенкой частицы жидкости не могут по ней скользить и вынуждены по ней как бы перекатываться, приобретая при этом вращательное движение. Аналогичное вращение возникает в соприкасающихся слоях, движущихся с различными скоростями, захватывая всю внутреннюю область потока.

Заметим, что, кроме вращательного движения, каждая частица в ламинарном потоке совершает поступательное и деформационное движение.

Для вычисления расхода рассмотрим слой, заключенный между двумя concentрическими окружностями радиуса r и $r+dr$ (фиг. 12-2). Площадь поперечного сечения этого слоя

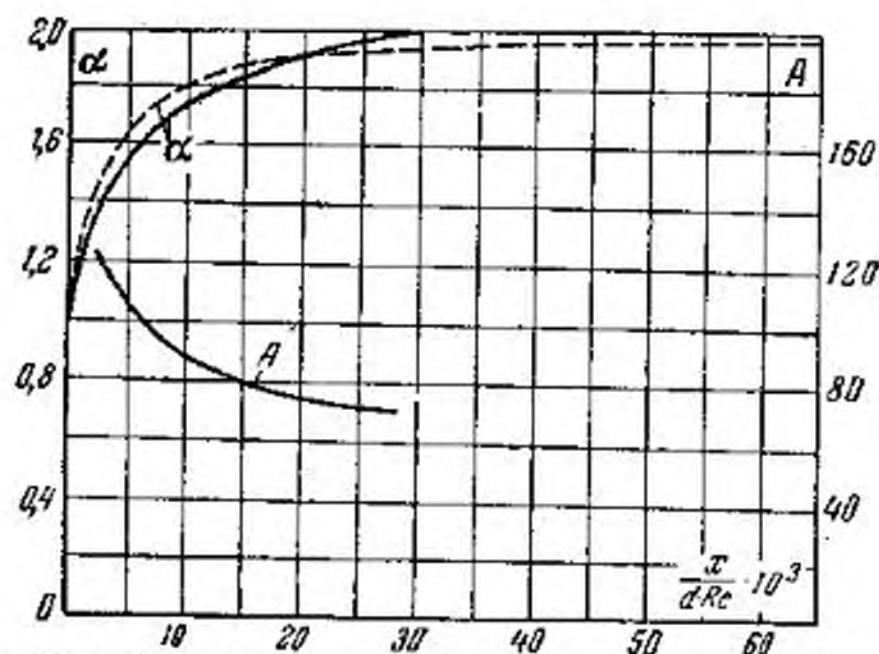
$$d\omega = 2\pi r dr.$$

Элементарный объемный расход, соответствующий этому слою, можно найти по формуле

$$dQ = u d\omega = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr.$$

Для вычисления полного расхода надо просуммировать элементарные расходы, т. е. проинтегрировать предыдущее выражение в пределах от $r=0$ до $r=r_0$. При этом получим:

$$Q = \int_0^{r_0} dQ = \int_0^{r_0} 2\pi r \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2) dr,$$



Фиг. 12-5. Зависимость коэффициентов α и A для ламинарного потока от $x/d-Re$. Пунктирная линия соответствует теории Буссинеска.

откуда и получаем формулу Пуазейля

$$Q = \frac{\pi \gamma J r_0^4}{8\mu} = \frac{\pi \gamma J d^4}{128\mu} \quad (12-11)$$

Величину средней скорости найдем по формуле

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\gamma J r_0^2}{8\mu} = \frac{\gamma J d^2}{32\mu} \quad (12-12)$$

Из сопоставления формул (12-9) и (12-12) найдем, что средняя скорость

$$v = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (12-13)$$

Пользуясь формулой (12-8), можно определить коэффициент кинетической энергии α и коэффициент количества движения β для равномерного ламинарного потока:

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{v^3 \omega} = 2; \quad (12-14)$$

$$\beta = \frac{\int u^2 d\omega}{v^2 \omega} = 1,33. \quad (12-15)$$

По длине начального участка при закругленном входе значение коэффициента α изменяется от 1 до 2 и для различных сечений начального участка, находящегося на расстоянии x от закругленного входа, по исследованиям автора в соответствии с теорией Буссинеска и Шиллера имеет значение согласно фиг. 12-5. На том же участке значения β изменяются от 1 до 1,33.

Энергия, теряемая при равномерном изотермическом ламинарном движении в круглом трубопроводе, может быть вычислена при помощи формул (12-11) и (12-12), согласно которым гидравлический уклон

$$J = \frac{32\mu v}{\gamma d^2} = \frac{128\mu Q}{\pi \gamma d^4} \quad (12-16)$$

Потеря удельной энергии на длине l

$$h_n = h_d = Jl,$$

т. е.

$$h_d = \frac{32\mu v l}{\gamma d^2} = \frac{128\mu Q l}{\pi \gamma d^4} \quad (12-17)$$

Последнее выражение можно преобразовать, для этого μ выразим через число Рейнольдса:

$$\mu = \frac{v d \rho}{Re}$$

Получим:

$$h_d = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (12-18)$$

Обозначим через λ

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad (12-19)$$

тогда будем иметь:

$$h_d = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (12-20)$$

Экспериментальные исследования равномерного ламинарного движения показывают, что при движении жидкости в практических условиях по металлическим, как правило, шероховатым трубопроводам наблюдается некоторое отклонение коэффициента λ от теоретического значения по формуле (12-19). Так, напри-

мер, автором в 1946 г. были исследованы стальные трубопроводы диаметром 27, 41, 75 и 106 мм и получены значения λ , приведенные в табл. 12-1.

Таблица 12-1

Значения коэффициента λ в ламинарном движении в металлических трубопроводах и гибких армированных шлангах

Диаметр, мм	25	27	41	50	75	106
$\lambda_{\text{труб}}$	—	$\frac{64}{Re}$	$\frac{70,8}{Re}$	—	$\frac{70}{Re}$	$\frac{70,3}{Re}$
$\lambda_{\text{шл}}$	$\frac{67}{Re}$	—	—	$\frac{76,5}{Re}$	$\frac{83,5}{Re}$	—

Еще большие отклонения были получены при исследовании специальных типов шлангов, армированных внутри проволочной спиралью (см. фиг. 14-12).

Формула (12-17) показывает, что в ламинарном движении потери удельной энергии пропорциональны расходу Q в первой степени и обратно пропорциональны диаметру d в четвертой степени. При заданном расходе и трубопроводах потери будут тем меньше, чем меньше вязкость жидкостей, т. е. чем выше их температура. Поэтому сильно вязкие жидкости, перекачиваемые в условиях ламинарного движения, обычно подогревают. Однако при этом надо иметь в виду, что температура подогрева не должна превосходить значений, при которых происходят разрушение ламинарного потока и превращение его в турбулентный, что обуславливает возрастание потерь и соответственно мощности, необходимой для перекачки.

Заметим, что формулы (12-18) и (12-19) не пригодны для начального участка. Для определения коэффициентов λ в начальном участке на основании исследований автора при $l_n = 0,02875 d Re$ следует пользоваться формулой

$$\lambda = \frac{A}{Re}, \quad (12.21)$$

где значения A приведены на фиг. 12-5.

В том случае, если длина участка l больше длины начального участка l_n , потеря энергии будет складываться из потери на начальном участке и из потери на сформировавшемся участке и определится по формуле

$$h_d = \left[\frac{A}{Re} \frac{l_n}{d} + \frac{64}{Re} \frac{(l-l_n)}{2g} \right] \frac{v^2}{2g},$$

или после преобразования

$$h_d = \left[\frac{(A-64)}{Re} \frac{l_n}{d} + \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \right] \frac{v^2}{2g}.$$

Принимая во внимание, что для полной длины начального участка $l = 69,56$, а $\frac{l}{d Re} = 0,02875$, получим:

$$h_d = \left(0,16 + \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g}. \quad (12.22)$$

Задача 12-1. Определить теряемую мощность при перекачке по трубопроводу длиной $l = 5$ км и диаметром $d = 0,3$ м мазута в количестве $G = 242$ т/час при температуре $t_1 = 40^\circ \text{C}$ (вязкость $\nu = 1,5$ см²/сек) и при температуре $t_2 = 10^\circ \text{C}$ (вязкость $\nu = 25$ см²/сек); объемный вес $\gamma = 950$ кг/м³ (принимается постоянным).

Решение. Сначала определим режим движения:

$$Re_1 = \frac{Q}{0,785 D v_1} = \frac{0,0707 \cdot 10^4}{0,785 \cdot 0,3 \cdot 1,5} = 2000,$$

где

$$Q = \frac{G}{3600} = \frac{242000}{950 \cdot 3600} = 0,0707 \text{ м}^3/\text{сек};$$

$$Re_2 = \frac{0,0707 \cdot 10^4}{0,785 \cdot 0,3 \cdot 25} = 120.$$

В обоих случаях движение ламинарное. Мощность в киловаттах вычислим по формуле

$$N = \gamma Q h_d : 102,$$

или

$$N_1 = \frac{128 \cdot \rho \nu l Q^2}{102 \cdot \pi d^4} = \frac{128 \cdot 97 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 \cdot 0,0707^2}{102 \cdot 3,14 \cdot 0,0081} = 17,5 \text{ кВт},$$

где

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{950}{9,81} = 97 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4;$$

$$N_2 = \frac{128 \cdot 97 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 5000 \cdot 0,0707^2}{102 \cdot 3,14 \cdot 0,0081} = 292 \text{ кВт}.$$

Таким образом, подогрев мазута с 10 до 40° С в рассматриваемом случае дает уменьшение мощности, необходимой для перекачки, на 94%.

12-4. Ламинарное изотермическое равномерное движение жидкости между соосными цилиндрами

Рассмотрим движение жидкости в пространстве между двумя соосно расположенными цилиндрами. В этом случае поперечное сечение потока (фиг. 12-6) ограничено двумя concentрическими окружностями¹.

Для получения формул распределения скоростей, расхода и потерь удельной энергии будем исходить из дифференциального уравнения (12-5)

$$\gamma J + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

¹ Рассматриваемая схема применяется в случаях, когда жидкость, текущая в пространстве между трубами, должна подогреваться. Для подогреваемой жидкости укладывается вторая труба, в рассматриваемом случае меньшего диаметра.



Фиг. 12-6. Схема кольцевого трубопровода.

После интегрирования будем иметь:

$$-\frac{\gamma J}{2\mu} \cdot r^2 + C = r \frac{du}{dr};$$

разделив переменные, получим:

$$\left(-\frac{\gamma J}{2\mu} \cdot r + \frac{C}{r}\right) dr = du,$$

откуда после повторного интегрирования

$$u = -\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r^2 + C \cdot \ln r + D.$$

Постоянные интегрирования C и D найдем, воспользовавшись граничными условиями, а именно: приняв, что на стенках труб скорости равны нулю, т. е. положив, что $u=0$ при $r=r_1$ и $r=r_2$.

Будем иметь:

$$C \cdot \ln r_1 + D = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r_1^2,$$

$$C \cdot \ln r_2 + D = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r_2^2.$$

Из этих уравнений следует:

$$C = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

$$D = \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot \frac{r_1^2 \ln r_2 - r_2^2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Таким образом, для скорости получим следующее выражение:

$$u = -\frac{\gamma J}{4\mu} \left(r^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln r - \frac{r_1^2 \ln r_2 - r_2^2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right). \quad (12-23)$$

Этому выражению соответствуют кривые распределения скоростей, изображенные на фиг. 12-7 для различных значений r_2/r_1 .

Расход Q вычислим по формуле

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr u = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{\gamma J}{4\mu} \cdot r^2 + C \cdot \ln r + D \right) r dr.$$

Имея в виду, что

$$\int r \cdot \ln r \cdot dr = \frac{r^2 \ln r_2}{2} - \frac{r_1^2 \ln r_1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4},$$

получим:

$$Q = 2\pi \left[-\frac{\gamma J}{16\mu} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1}{2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4} \right) + \frac{\gamma J}{4\mu} \cdot \frac{r_1^2 \ln r_2 - r_2^2 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \right],$$

или после соответствующих алгебраических преобразований

$$Q = \frac{\pi \gamma J}{8\mu} \left[r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right]. \quad (12-24)$$

Среднюю скорость вычислим по формуле

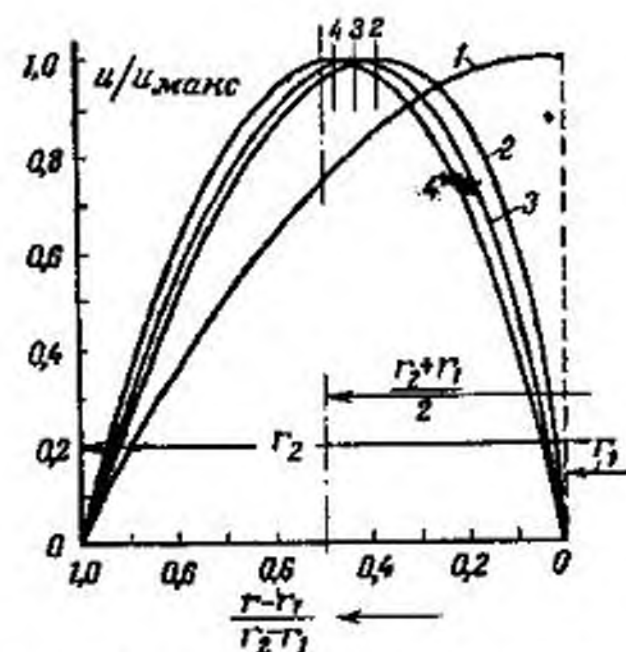
$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\gamma J}{8\mu} \left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right). \quad (12-25)$$

Гидравлический уклон

$$J = \frac{8\mu v}{\gamma \left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)}. \quad (12-26)$$

Потери энергии на длине l

$$h_d = \Delta l = \frac{8\mu v l}{\gamma \left(r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)}. \quad (12-27)$$



Фиг. 12-7. Кривые распределения скоростей в поперечных сечениях кольцевого трубопровода в ламинарном потоке.

$r_2=95$ мм; 1— $r_1=0$; 2— $r_1=5$ мм;
3— $r_1=17.5$ мм и 4— $r_1=50$ мм.

Введем в последнее уравнение число Рейнольдса

$$Re = \frac{4vR\rho}{\mu} = \frac{2v(r_2 - r_1)\rho}{\mu},$$

где $R = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2 + r_1)} = \frac{r_2 - r_1}{2}$ — гидравлический радиус¹.

В результате получим:

$$h_d = \frac{32}{Re} \cdot \frac{l}{\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2 - r_1} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 - r_1} \cdot \frac{1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

или, вводя вместо r_1 и r_2 диаметры труб d_1 и d_2 , получим:

$$h_d = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{\frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2 - d_1} + \frac{d_2 + d_1}{\ln \frac{d_1}{d_2}}} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{\frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2 - d_1} + \frac{d_2 + d_1}{2,3 \lg \frac{d_1}{d_2}}} \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (12-28)$$

Если назвать приведенным диаметром d_0 выражение

$$d_0 = \frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2 - d_1} + \frac{d_2 + d_1}{2,3 \lg \frac{d_1}{d_2}}, \quad (12-29)$$

то потери энергии можно определять по формуле

$$h_d = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d_0} \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (12-30)$$

12-5. Ламинарное изотермическое равномерное движение жидкости в плоской щели

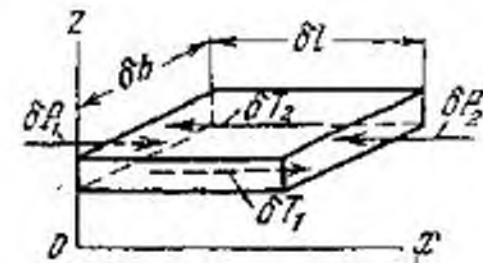
Рассмотрим равномерное движение слоя, являющегося частью потока жидкости, показанного на фиг. 12-8 и имеющего форму, изображенную на фиг. 12-9. Для некоторой определенности будем считать, что слой находится в верхней половине щели. Составим уравнение движения этого слоя, допуская, что в плоскостях, параллельных плоскости x, z , скорости распределяются одинаково². Так как частицы рассматриваемого слоя движутся равномерно, то сумма проекций всех действующих на него сил на любую ось должна равняться нулю.

¹ Здесь $\omega = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ — площадь живого сечения; $\gamma = 2\pi(r_2 + r_1)$ — смоченный параметр.

² Такое допущение справедливо только для щели, бесконечно широкой по сравнению с ее толщиной.



Фиг. 12-8. Распределение скоростей в плоской щели ламинарного потока.



Фиг. 12-9. Схема сил, действующих на плоский элемент жидкости в ламинарном потоке.

Выясним, какие силы будут проектироваться на ось движения, предполагая, что ось движения горизонтальна. Это будут следующие силы:

$$\delta T_1 = -\tau \delta b \delta l;$$

$$\delta T_2 = \delta T_1 + \frac{\partial \tau}{\partial z} \delta z \delta b \delta l;$$

$$\delta P_1 - \delta P_2 = -\frac{\partial p}{\partial l} \delta l \delta b \delta z.$$

Сумма проекций этих сил на ось движения должна равняться нулю, а именно:

$$-\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial l} = 0,$$

или в связи с формулой (2-19)

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (12-31)$$

Так как τ и u являются функциями только z , а $\frac{\partial p}{\partial l} = -\gamma J$, последнее уравнение можно представить в виде:

$$-\gamma J = \mu \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

Интегрируя уравнение (12-31) дважды, получим:

$$u = -\frac{\gamma J}{2\mu} z^2 + Cz + D.$$

Постоянные интегрирования определим из условия, что на стенках (фиг. 12-8) при $z=0$ и $z=h$, $u=0$, откуда $D=0$,

$$C = \frac{\gamma J h}{2\mu}.$$

Таким образом,

$$u = \frac{\gamma J}{2\mu} \cdot z(h-z). \quad (12-32)$$

Из этого уравнения видно, что скорости распределяются по параболе (фиг. 12-8).

Расход

$$Q = \int_0^h u b dz = \frac{\gamma J b}{2\mu} \int_0^h z(h-z) dz = \frac{\gamma J b}{12\mu} h^3. \quad (12-33)$$

Среднюю скорость найдем по формул

$$v = \frac{Q}{bh} = \frac{\gamma J h^2}{12\mu}. \quad (12-34)$$

Гидравлический уклон равен:

$$J = \frac{12\mu v}{\gamma h^2}. \quad (12-35)$$

Потери удельной энергии вычислим по формуле

$$h_d = J l = \frac{12\mu v l}{\gamma h^2}, \quad (12-36)$$

где l — длина щели (в направлении оси x).

Весьма часто формулами (12-33)—(12-36) пользуются и для расчета кольцевых щелей, что, однако, не всегда допустимо.

Если канал конечной ширины, расчетными формулами являются следующие (в этом случае уже нельзя считать распределение скоростей в плоскостях, параллельных плоскости x, z , одинаковым):

$$Q = \frac{\gamma J b h^3}{12\mu} \left(1 - 0,62 \frac{h}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \text{th} \frac{\pi n b}{2h} \right); \quad (12-37)$$

$$v = \frac{\gamma J}{12\mu} h^2 \left(1 - 0,62 \frac{h}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \text{th} \frac{\pi n b}{2h} \right); \quad (12-38)$$

$$h_d = \frac{12\mu v l}{\gamma h^2} \left(1 - 0,62 \frac{h}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \text{th} \frac{\pi n b}{2h} \right). \quad (12-39)$$

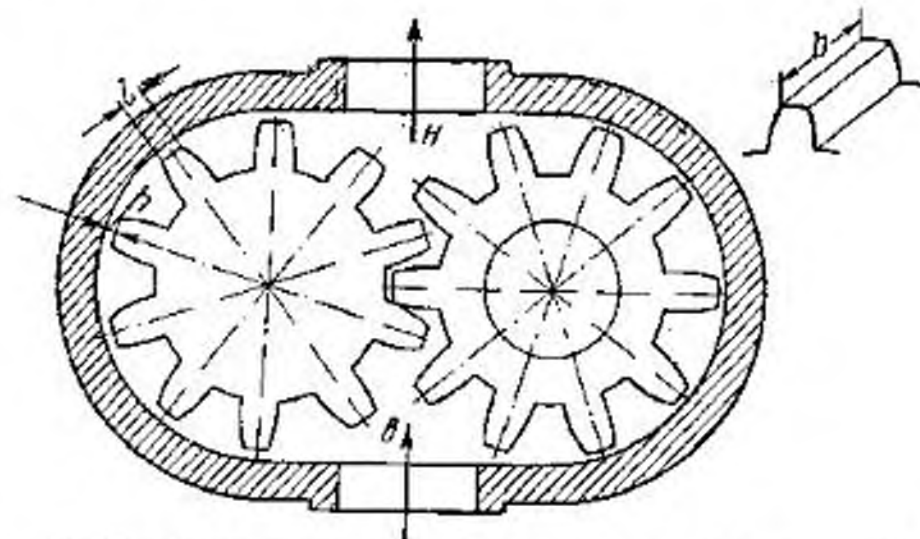
При малом значении второго члена в скобках формулы (12-37)—(12-39) обращаются в (12-33), (12-34), (12-36).

В формулах (12-37)—(12-39) th означает гиперболический тангенс. Во многих случаях достаточно ограничиться только значением $n=1$.

Задача 12-2. В шестеренчатом насосе (фиг. 12-10) благодаря разности давлений, создающихся в нагнетательной полости (n) и во всасывающей полости (s), часть жидкости через радиальные зазоры (h) перетекает из нагнетательной полости обратно во всасывающую. Требуется определить количество перетекаемой жидкости (утечки) согласно следующим данным: 1) каждый из зазоров представляет узкую щель, высота которой $h = 0,009$ см, длина щели $l = 0,2$ см, а ширина $b = 2,9$ см; 2) общий перепад давления

$\delta p = 4$ кг/см². Через зазоры протекает масло, вязкость которого при температуре $t = 17^\circ \text{C}$, $\mu = 6,83$ г/см.сек. Задачу решить, не принимая во внимание вращения шестерен.

Решение. Вследствие того, что размеры всех зазоров, а также их число слева и справа одинаково, расход жидкости через левые и правые зазоры будет один и тот же.



Фиг. 12-10. Схема шестеренчатого насоса. К задаче 12-2.

В этих условиях перепад давления, приходящийся на один зазор, равен $\delta p_1 = \frac{\delta p}{n}$, где $n = 5$ число зазоров с каждой стороны. Расход жидкости через зазор можно определить по формуле (12-33), принимая $\gamma J = \frac{\delta p}{n l}$,

$$Q = \frac{\delta p}{n} \frac{b h^3}{12\mu l} = \frac{4 \cdot 9,81 \cdot 10^5}{5} \cdot \frac{2,9 \cdot 0,009^3}{12 \cdot 6,83 \cdot 0,2} = 0,1 \frac{\text{см}^3}{\text{сек}}.$$

Число $9,81 \cdot 10^5$ введено в результате изменения размерности динамического коэффициента вязкости. Общий расход $Q_0 = 2Q = 0,2$ см³/сек.

Предлагается доказать самостоятельно, что при неравных по толщине зазорах или при неодинаковом их числе, расчетной формулой будет служить:

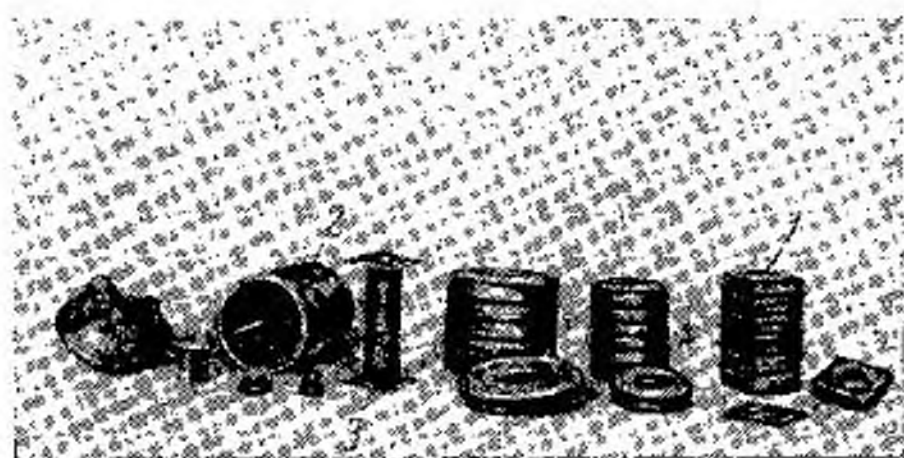
$$Q_0 = \frac{\delta p b}{12\mu l} \left[\frac{1}{\frac{1}{h_1^3} + \frac{1}{h_2^3} + \frac{1}{h_3^3} + \frac{1}{h_4^3} + \frac{1}{h_5^3}} + \frac{1}{\frac{1}{h_6^3} + \frac{1}{h_7^3} + \frac{1}{h_8^3} + \frac{1}{h_9^3} + \frac{1}{h_{10}^3}} \right].$$

Заметим, что в шестеренчатом насосе перетекание жидкости (утечки) происходит также и через зазоры между торцами шестерен и корпусом (через торцевые зазоры).

12-6. Плоский радиальный ламинарный поток

Рассматриваемый в этом параграфе плоский радиальный поток представляет упрощенную модель потока, образующегося при фильтрации. Фильтрацией называется движение жидкости через некоторую пористую среду. Основные уравнения теории фильтрации были получены Н. Е. Жуковским в 1889 г.

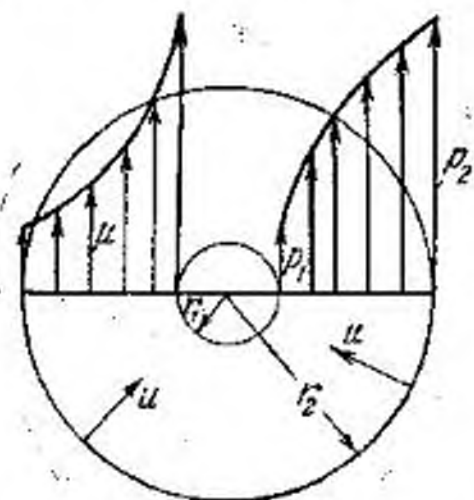
Радиальный поток возникает, в частности, при фильтрации топлива через войлочные фильтры, устанавливаемые весьма ча-



Фиг. 12-11. Фильтр тонкой очистки.

1—фильтрующие секции; 2—корпус; 3—металлическая сетка.

сто в системе питания двигателей внутреннего сгорания. Один из таких фильтров в собранном и разобранном виде показан на фиг. 12-11.



Фиг. 12-12. Распределение давления и скорости по толщине фильтрующей секции.

В отличие от фильтрационного движения грунтовых вод, которое может совершаться и под действием силы тяжести, движение жидкости через рассматриваемый фильтр происходит благодаря разности давлений по обе стороны от фильтра. В условиях протекания жидкости через фильтр возможна как ламинарная, так и турбулентная фильтрация. В условиях ламинарной фильтрации пьезометрический уклон пропорционален расходу в первой степени. В условиях турбулентной фильтрации пьезометрический уклон пропорционален расходу в степени $\epsilon > 1$.

Рассмотрим лишь ламинарную фильтрацию (фиг. 12-12) через фильтр с кольцевым сечением. Экспериментальные исследования ламинарной фильтрации позволяют выразить зависимость между пьезометрическим уклоном и расходом в виде:

$$Q = kSJ_n, \quad (12-40)$$

или в виде

$$\gamma Q = kS \cdot \frac{dp}{dr}, \quad (12-41)$$

где k — коэффициент фильтрации, м/сек;
 $S = 2\pi rh$ — площадь поперечного сечения фильтрационного потока, м²;

h — высота фильтра, м;

$\frac{dp}{dr}$ — градиент давления.

Для получения расчетной зависимости представим уравнение (12-40) в виде:

$$dp = \frac{\gamma Q}{k \cdot 2\pi h} \cdot \frac{dr}{r},$$

откуда после интегрирования

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma Q}{k \cdot 2\pi h} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1},$$

или

$$p_2 - p_1 = \frac{2,3\gamma Q}{2\pi kh} \lg \frac{r_2}{r_1}. \quad (12-42)$$

Весовой расход G вычислим по формуле

$$G = \gamma Q = \frac{2,73kh}{\lg \frac{r_2}{r_1}} \cdot (p_2 - p_1). \quad (12-43)$$

На фиг. 12-13 изображены результаты исследований автором гидравлического сопротивления войлочного фильтра с секциями различных форм, показанных на фиг. 12-11. Исследованию подвергались фильтры разных размеров и разных сортов¹. Из рассмотрения этого графика следует, что перепад давления в пределах опыта пропорционален расходу жидкости в первой степени, что подтверждает справедливость формулы (12-43), а значит и исходной формулы (12-40). Формула (12-42) может быть использована для исследования закона изменения давления в фильтре. Для этого ее надо представить в виде:

$$p - p_1 = \frac{2,3\gamma Q}{2\pi kh} \lg \frac{r}{r_1}, \quad (12-44)$$

где r — текущий радиус.

Имея в виду, что согласно формуле (12-43)

$$k = \frac{\gamma Q \cdot \lg \frac{r_2}{r_1}}{2,73 \cdot h(p_2 - p_1)},$$

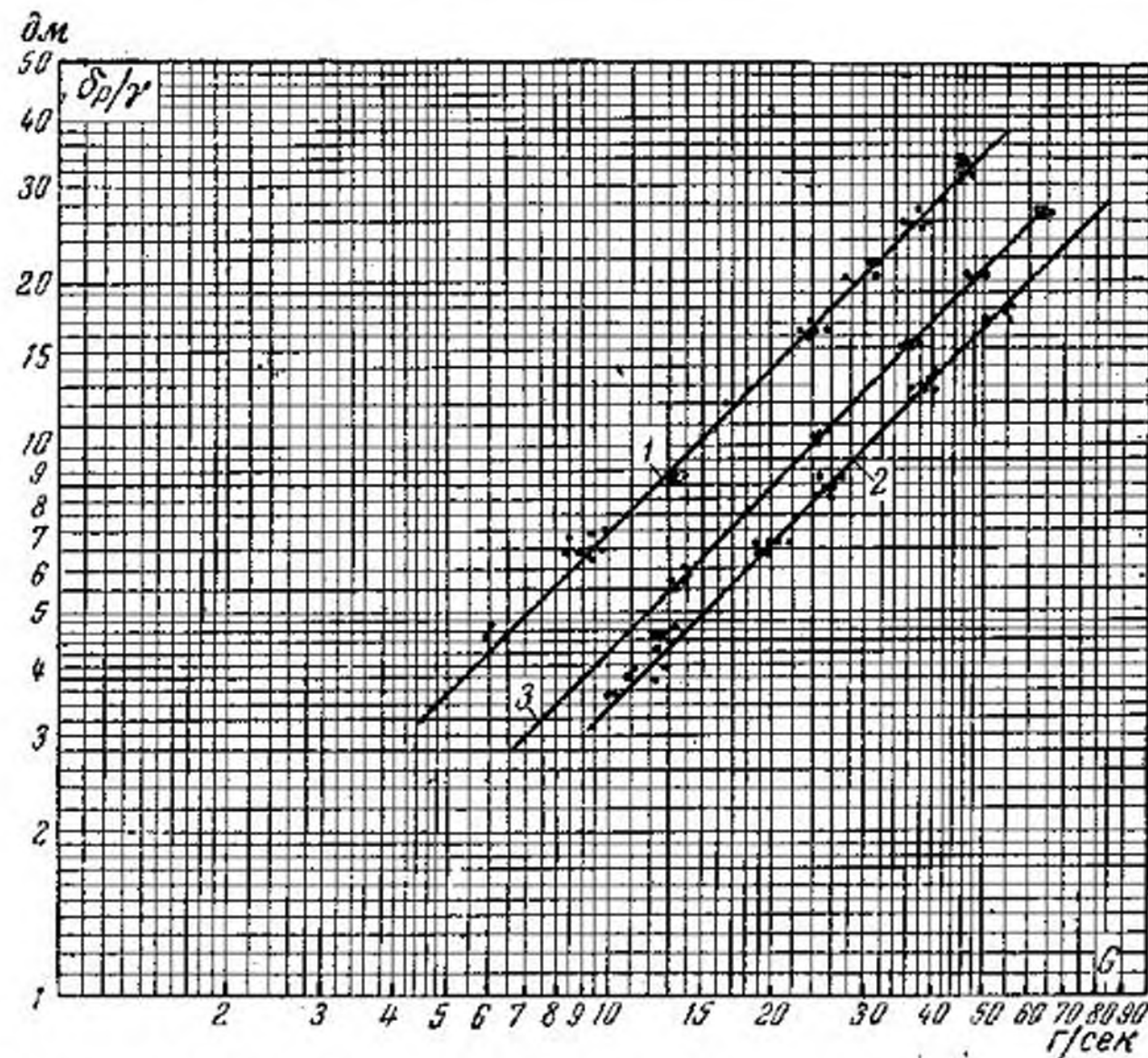
получим:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{\lg \frac{r_2}{r_1}} \cdot \lg \frac{r}{r_1}. \quad (12-45)$$

Из формулы (12-45) следует, что в направлении течения давление падает или перепад давлений растет по логарифмическому закону (фиг. 12-12).²

¹ В исследованиях принимал участие П. С. Мучников.

² При расчете фильтров, внешний контур которых представляет собой квадрат (см. фиг. 12-11), в соответствующие формулы следует подставить значение эквивалентного радиуса, равного $r_{2s} = \frac{2b}{\pi}$, где b — сторона квадрата.



Фиг. 12-13. Зависимость перепада давления от расхода при фильтрации газойля ($\nu = 0,068 \text{ см}^2/\text{сек}$; $\gamma = 0,85 \text{ Г/см}^3$; $t = 20^\circ\text{C}$).
1—круглые фильтрующие секции $d_2/d_1=122/38$; 2—круглые фильтрующие секции $d_2/d_1=83/38$; 3—квадратные секции $b/d_1=65/38$.

Из уравнения неразрывности $Q = \text{const}$ следует, что скорость фильтрации v_ϕ , равная отношению расхода Q к общей площади кругового сечения фильтра $S = 2\pi rh$, т. е.

$$v_\phi = \frac{Q}{2\pi rh}, \quad (12-46)$$

изменяется в радиальном направлении (фиг. 12-12) по гиперболическому закону

$$v_\phi \cdot r = \text{const.} \quad (12-47)$$

Значения коэффициента фильтрации зависят от материала фильтрующего элемента, степени его загрязнения, рода фильтрующей жидкости и ее температуры. Для однородной фильтрационной среды коэффициент фильтрации может быть выражен через ко-

эффициент вязкости жидкости и так называемый коэффициент проницаемости, характеризующий фильтрационную среду

$$k = k_{пр} \frac{\gamma}{\mu}, \quad (12-48)$$

где γ — объемный вес жидкости, кг/м^3 ;
 μ — динамический коэффициент вязкости, $\text{кг}\cdot\text{сек/м}^2$;
 $k_{пр}$ — коэффициент проницаемости, м^2 .

Существенное влияние на коэффициент проницаемости оказывает пористость фильтрационной среды, которая характеризуется так называемым коэффициентом порозности

$$k_{пор} = \frac{W_n}{W}, \quad (12-49)$$

где W_n — объем пор;
 W — общий объем пористой среды.

Чем меньше $k_{пор}$, тем плотнее материал фильтра, тем большее сопротивление он оказывает фильтрации жидкости.

В табл. 12-2 приведены значения коэффициента фильтрации для войлочного фильтра, результаты испытания которого изображены на фиг. 12-13. Для сопоставления в той же таблице приведены средние значения коэффициента фильтрации для некоторых других сред.

Таблица 12-2

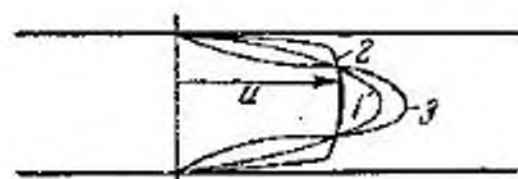
Значения коэффициентов порозности и фильтрации

Фильтрующий материал	Коэффициент порозности, %	Коэффициент фильтрации, см/сек
Гравий ($2 \leq d \leq 20 \text{ мм}$)	30—40	—
Пески ($0,06 \leq d \leq 2 \text{ мм}$)	30—45	$(1-6) \cdot 10^{-3}$ до $(1-6) \cdot 10^{-2}$
Супесь	35—45	$(1-6) \cdot 10^{-3}$ до $(1-6) \cdot 10^{-4}$
Суглинок	35—50	$(1-6) \cdot 10^{-5}$
Глинистый грунт	40—55	$(1-6) \cdot 10^{-6}$
Торфяной грунт	60—80	—
Войлок	86,5	0,00267 до 0,00384

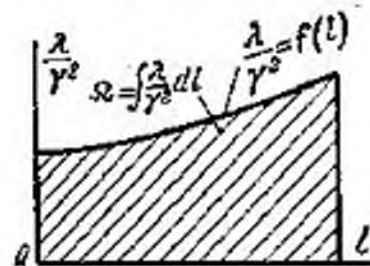
12-7. Неизотермическое ламинарное движение в круглой трубе

В неизотермическом потоке температура может изменяться и по живому сечению потока и по длине. Существенной величиной, влияющей на распределение скоростей и давлений в ламинарном потоке, является коэффициент вязкости жидкости μ ; непостоянство его в неизотермическом потоке является причиной нарушения законов распределения скоростей и давлений, свойственных изотермическому потоку.

Если, например, в изотермическом потоке в круглой трубе скорости распределяются по параболическому закону (фиг. 2-4), то в потоке неизотермическом, например в теплообменном аппарате, распределение скоростей будет подчиняться другому закону (фиг. 12-14). Важной особенностью неизотермического потока является и то, что вследствие неодинаковой температуры жидкости в потоке возникают конвекционные течения, как правило, также изменяющие распределение скоростей, соответствующее



Фиг. 12-14. Схема распределения скоростей в изотермическом и неизотермическом ламинарных потоках. 1—изотермический поток; 2—неизотермический поток (нагревание); 3—неизотермический поток (охлаждение).



Фиг. 12-15. Схема зависимости λ/γ^2 от l по длине ламинарного неизотермического потока, охлаждающегося в направлении движения.

изотермическому потоку. Это особенно проявляется в трубопроводах, расположенных вертикально. В общем случае конвекционные течения могут явиться причиной нарушения равномерности движения потока и даже его ламинарности.

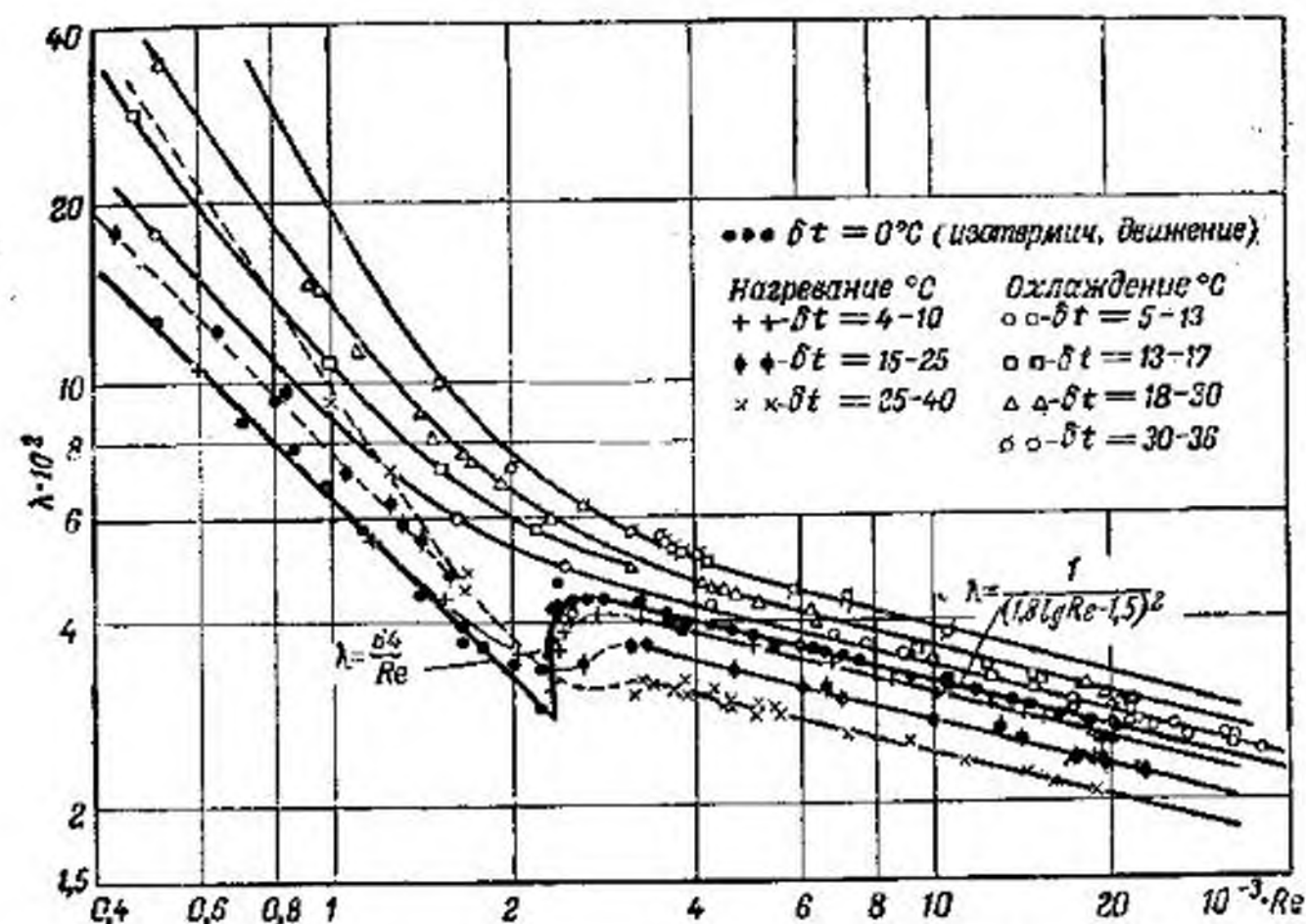
Неизотермический ламинарный поток изучен недостаточно и в книге подробно не рассматривается. Ниже будет рассмотрен случай приближенного решения лишь одного частного случая, а именно определение потерь удельной энергии в потоке неизотермическом только по длине. Так как полная потеря удельной энергии на всей длине равна сумме потерь на элементарных участках, ее можно приближенно определить, рассматривая движение на каждом элементарном участке трубопровода как изотермическое, по формуле

$$h_d = \frac{G^2}{2g\omega^2 d} \int_0^l \frac{\lambda}{\gamma^2} dl, \quad (12-50)$$

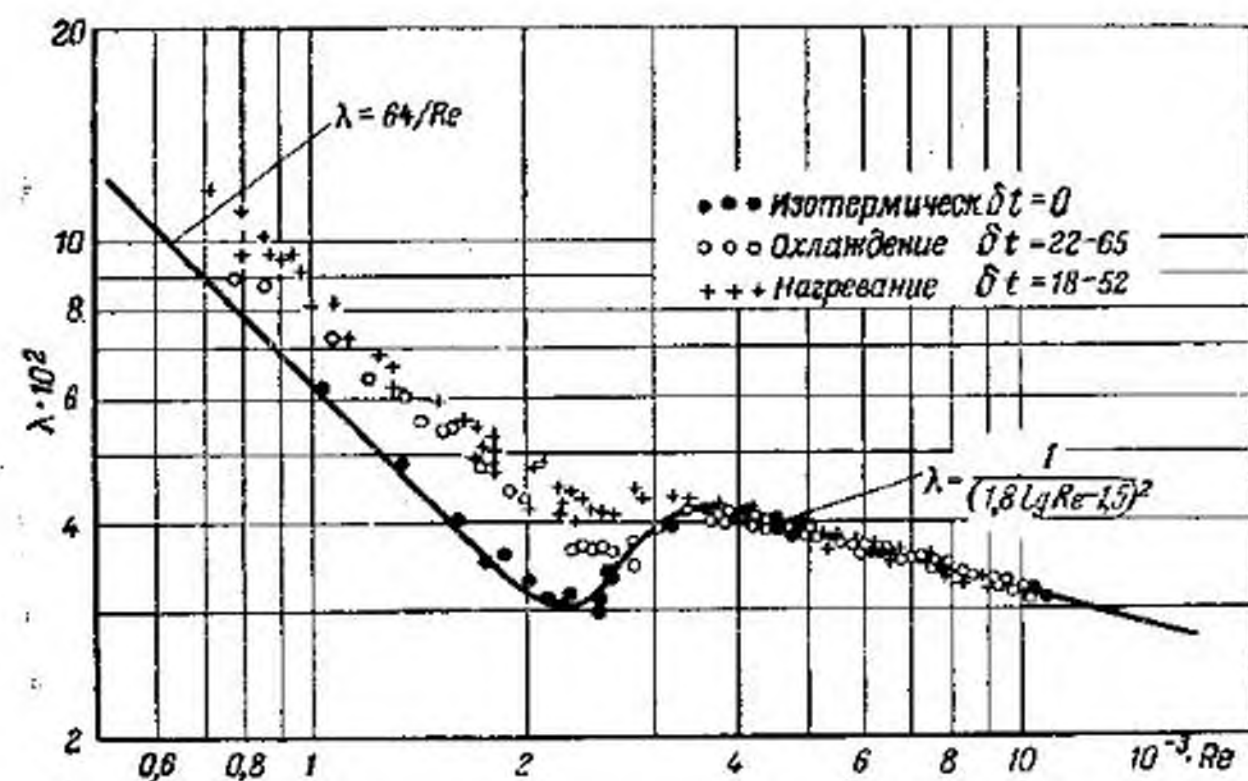
где G — весовой расход.

Для такого решения вопроса нужно знать закон распределения температуры вдоль трубопровода. Это позволит приближенно определить для каждого участка трубопровода коэффициент вязкости жидкости, объемный вес, число Re и коэффициент λ .

Интеграл $\int_0^l \frac{\lambda}{\gamma^2} dl$ можно также вычислить, если изобразить зависимость $\frac{\lambda}{\gamma^2}$ от l графически (фиг. 12-15). В этом случае он будет равен заштрихованной на фигуре площади. Для ко-



Фиг. 12-16. Зависимость среднего значения коэффициента λ от Re при неизотермическом потоке в гладких трубах по опытам Михеева.



Фиг. 12-17. Зависимость среднего значения коэффициента λ от Re при неизотермическом потоке в гладких трубах по опытам Михеева для воздуха.

ротких трубопроводов по данным М. А. Михеева расчет h_0 в неизотермических потоках в круглой трубе можно производить, принимая среднее значение коэффициента λ по фиг. 12-16 и 12-17. Следует обратить внимание на то, что коэффициент λ имеет различное значение в зависимости от того, движется ли жидкость в сторону увеличения температуры или в сторону уменьшения. Число Re на фигурах соответствует средней температуре.

Глава тринадцатая

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

13-1. Виды трения

Гидродинамическая теория смазки занимается изучением гидравлических явлений, возникающих в смазочном слое при относительном движении двух твердых тел, разделенных этим слоем. Основоположником этой теории является выдающийся русский ученый Н. П. Петров.

Заслуга Н. П. Петрова заключается в том, что он впервые в мире, в 1883 году разработал теорию трения в хорошо смазанных подшипниках, исходя из положения, что трение в подшипниках подчиняется гидродинамическим законам. В обоснование своей теории Н. П. Петров проделал огромное количество экспериментальных исследований по изучению вязкостных свойств различных жидкостей. Дальнейшее развитие гидродинамической теории обязано трудам О. Рейнольдса, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, Л. С. Лейбензона и других. Представляют значительный интерес также работы немецких ученых А. Зоммерфельда, Гюмбеля и др.

Первая работа Н. Е. Жуковского «О гидродинамической теории трения хорошо смазанных тел» была опубликована в 1886 году. В 1904 году Н. Е. Жуковским совместно с С. А. Чаплыгиным было дано точное решение задачи о движении вязкой жидкости в двух измерениях между двумя эксцентричными окружностями. Эта работа послужила основой дальнейших работ в этой области. Следует указать, что до исследований Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина считалось, по утверждениям немецкого ученого А. Зоммерфельда, что точное решение этой задачи (подшипник бесконечной длины) невозможно.

Л. С. Лейбензоном была исследована кинематика потока в масляном слое, установлены «границы приложимости гидродинамической теории смазки».

В наше время гидродинамическая теория трения развивается применительно к работе подшипников конечной длины.

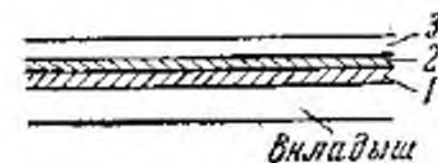
В развитии этой теории большую роль сыграли и советские ученые Н. И. Мерцалов, М. И. Яновский, Е. М. Гутьяр, А. К. Дьячков и другие.

Подробное изложение гидродинамической теории смазки выходит за рамки учебника по гидравлике.

В этой главе будут исследованы несколько частных вопросов этой теории: кинематика потока, способность жидкости в смазочном слое воспринимать большие усилия, не выжимаясь из зазора, понятие о коэффициенте трения и некоторые другие.

Теоретической основой гидродинамической теории смазки служат дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости.

При этом жидкость смазочного слоя рассматривается однородной, хотя ее структура в смазочном слое весьма сложна. В общем случае этот слой может быть представлен, как показано на фиг. 13-1. Непосредственно на поверхности твердых тел, например цапфы или вкладыша, образуется пленка 1 окислов металла или его неорганических соединений (сульфидов, хлоридов и т. п.) толщиной $\approx 10^{-4}$ мм. Такие пленки обладают слоистой структурой, легко сдвигаются друг относительно друга, тем самым уменьшая трение.



Фиг. 13-1. Структура смазочного слоя.

К пленке окислов или неорганических соединений примыкает так называемый граничный адсорбционный слой 2 смазочного вещества, удерживающийся возле поверхностей твердых тел под действием молекулярных сил, исходящих от этих тел. По своим механическим свойствам адсорбционный слой отличается от остальной жидкости смазочного слоя. Молекулы адсорбционного слоя располагаются около поверхности тел упорядоченными слоями. Иногда ближайшие к твердому телу молекулы адсорбционного слоя вступают с ним в химическую реакцию (хемосорбция). Граничный слой образуется вследствие содержания в смазочном веществе поверхностно активных молекул (так называемых присадок, добавляемых к маслам для улучшения их смазочных свойств), способных адсорбироваться на трущихся поверхностях (к числу присадок относится, например, олеиновая кислота). Остальная часть смазочного слоя 3 образована нормальной смазкой.

Рассмотрим явления, возникающие в смазочном слое подшипника. В состоянии покоя (фиг. 13-2) цапфа занимает самое нижнее положение. Она лежит на вкладыше подшипника, выдавливая под действием тяжести смазку в местах соприкосновения. Поверхности трения твердых тел в этом положении отделены друг от друга окисным и адсорбционным слоем, поэтому в момент трогания (начала вращения) начальная сила трения, имею-