

**ГЕРХАРД ШПЕТЕ**  
**доктор технических наук, профессор**

**НАДЕЖНОСТЬ  
НЕСУЩИХ  
СТРОИТЕЛЬНЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ**

**Перевод с немецкого О. О. Андреева**

**МОСКВА  
СТРОЙИЗДАТ**

**1994**

**Шпете Г.** Надежность несущих строительных конструкций/ Пер. с нем. О. О. Андреева. — М.: Стройиздат, 1994. — 288 с.: ил. — Перевод. изд.: Gerhard Spaethe. — Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen. — ISBN 5-274-01208-6.

В книге немецкого автора представлены современные методы теории надежности применительно к строительным конструкциям. Рассмотрены практические модели надежности. Описано математическое моделирование случайных свойств сооружения и соответствующих нагрузок. Приведены статистические данные по нагрузкам и свойствам материалов.

Для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных организаций.

Табл. 33, ил. 67, список лит.: 234 назв.

Редактор Г. А. Лебедева

Ш 3302000000—412 Без объявл.  
047 (01)—94

ISBN 5-274-01208-6 (РФ)  
ISBN 3-345-00194-2 (ГДР)

© VEB Verlag für Bauwesen,  
Berlin, 1987

© Перевод на русский язык.  
О. О. Андреев, 1994

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория надежности несущих строительных конструкций превратилась за последние десять лет из предмета научных исследований в действенное средство решения практических задач безопасности и надежности. Большое применение получили приближенные методы оценки вероятности отказа и показателя безопасности, с помощью которых рассматриваются сложные функции предельных состояний с многими случайными величинами. Значительный прогресс достигнут в области определения сочетаний нагрузок и в расчете систем с многими возможными механизмами отказа.

Тем не менее использование этих методов на практике не поспевает за быстрым развитием их в теоретической области. В предлагаемой книге делается попытка представить эти новые методы, чтобы способствовать их внедрению при разработке нормативных документов, особенно в части требований по безопасности.

Основной материал изложен в разделе 3, где представлены методы теории надежности несущих конструкций. При этом особое внимание уделено приближенным решениям на основе теории надежности 1-го порядка, которые в будущем будут иметь еще большее практическое значение. Изложение ограничивается статическими задачами, случайные колебания в книге не рассматриваются. Инженера, не знакомого с этой областью знаний, вероятно может сбить с толку слишком большое число теоретических возможностей решения задачи. В этом случае можно рекомендовать при первом чтении опустить разделы о случайных функциях, о стохастически зависящих базисных переменных, о методе Монте-Карло, о проблемах с многими базисными переменными, зависящими от времени, и о системах с многими предельными состояниями.

Методы теории надежности сопоставляются в разделе 4 с нормативными моделями надежности как с традиционными подходами, так и с современной концепцией метода предельных состояний с частными коэффициентами надежности. Между ними и теорией надежности в разделе 5 устанавливаются связи и дается обзор возможностей вычисления частных коэффициентов средствами теории надежности. Наряду с их прямыми приложениями к конкретным конструкциям с высокими требованиями по безопасности в будущем будут иметь большое значение косвенные приложения для установления нормативных требований по безопасности.

Понимание теории надежности требует определенных знаний по теории вероятностей и математической статистике. Чтобы облегчить понимание материала книги, в разделе 2 кратко описаны положения теории вероятностей, которые нужны для дальнейшего изложения. При этом рассматриваются вопросы, которые обычно очень скупо освещены или вообще отсутствуют в учебниках по теории вероятностей (например, теория распределения экстремальных значений и различные случайные процессы, играющие важную роль при представлении нагрузок). В дополнение к этому в приложении II дана обширная сводка формул для отдельных типов распределения вероятностей с тем, чтобы облегчить прикладные расчеты.

Проблемы математической статистики не рассматриваются. Читателю, не имеющему опыта в этой области, рекомендуется дополнительно воспользоваться соответствующими учебниками.

Расчеты на основе теории надежности предъявляют более жесткие требования к исходным данным, которые являются случайными числами или функциями. В последнем разделе делается попытка обобщить информацию о типах распределения и статистических параметрах наиболее распространенных строительных материалов и нагрузок. Этот раздел следует оценить именно как попытку дать представление о порядках величин разброса и типах распределения. Эта попытка ни в коем случае не может заменить собственные усилия читателя по сбору данных как основы исследований надежности конструкций.

Для облегчения понимания теории приведены примеры ее применения. Они подобраны таким образом, чтобы проблемы с механической точки зрения были предельно простыми. Понимание стохастической модели не должно быть затруднено сложностью механической модели. За счет этого, правда, может появиться опасность затупевывания тех трудностей, которые содержатся в этой проблематике и, безусловно, появятся при практическом применении. Некоторые механические модели используются многократно с тем, чтобы сравнить различные методы.

Я благодарен всем моим коллегам, которые поддержали меня дискуссиями и ценными советами. Особую признательность выражаю д-ру, инж. Карлу Эльбингеру из Института подземного строительства Академии строительства ГДР, который взял на себя труд написать пункт «Строительные грунты», д-ру техн. наук Вольфгангу Грассе из НИИ комбината легких металлических конструкций, д-ру физ.-мат. наук Герману Фридриху из Института механики АН ГДР и дипл. инж. Гансу-Юргену Редигу из Института отопления, вентиляции и основ строительной техники Академии строительства ГДР, которые внимательно прочитали рукопись, и дали много полезных советов для окончательной редакции. Я благодарю д-ра, инж. Дорис Грайнер-Май, редактора издательства по строительству, которая способствовала быстрому выходу в свет этой книги. Хильдегард Шенгел я благодарю за тщательное перепечатывание рукописи.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сооружения должны выполнять свои функции в течение предусмотренного срока службы. Это значит, что с весьма большой вероятностью они должны выдерживать все внешние воздействия, которые могут возникать во время строительства и эксплуатации. Они должны воспринимать механические нагрузки, а также противостоять химическим, биологическим и климатическим воздействиям без потери несущей способности и без ограничений эксплуатационной пригодности.

Меры, применяемые сегодня в строительстве для обеспечения надежности несущих конструкций, можно разделить на три различных стратегических направления, которые разворачиваются во времени одно за другим: создание достаточного резерва прочности между нагрузкой и несущей способностью; исключение ошибок человека; ограничение размера ущерба. Рассмотрим эти направления несколько подробнее.

### 1.1. РЕЗЕРВ ПРОЧНОСТИ МЕЖДУ НАГРУЗКОЙ И НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТЬЮ

При проектировании размеры поперечных сечений и материал конструкции должны быть выбраны таким образом, чтобы за все время службы несущей конструкции сопротивление  $R$  было с очень высокой вероятностью больше нагрузок  $S$ :

$$Z = R - S \geq 0. \quad (1.1)$$

Нагрузка  $S$  почти всегда является функцией времени, и если она не превзойдет уровень сопротивления  $R$ , называемого также несущей способностью конструкции, не возникнет случаев отказа.

Разность  $R - S$  называется расстоянием безопасности, или зоной безопасности, или резервом прочности  $Z$  (рис. 1.1). В состоянии безотказной работы эта величина положительна.

Выполнение неравенства (1.1) было бы тривиальным, если бы инженеру не приходилось одновременно удовлетворять требованиям высокой экономичности и снижения материалоемкости конструкции. Почти всегда назначением больших размеров поперечных сечений можно достичь большей несущей способности и, следовательно, большего резерва прочности. Наоборот, снижением резерва прочности можно добиться экономии материала.

Стремление экономно строить принуждает конструктора снижать резерв прочности настолько это возможно.

Однако ни  $R$ , ни  $S$  точно не известны, поскольку обе величины появятся только в будущем. Проектировщик не знает ни фактических нагрузок, которые будут действовать на сооружение в период эксплуатации, ни действительных свойств материала еще несуществующего объекта.

Это означает, что в процессе подбора сечений приходится идти на известный риск, т. е. принимать решение в условиях неопределенности. Чтобы уменьшить этот риск, следует создать вспомогательные средства, которые должны дать ответ на вопрос о будущем поведении конструкции.

Важнейшим вспомогательным средством является статический расчет. В этом расчете делаются предположения об ожидаемых нагрузках, и методами технической механики, сопротивления материалов, теории упругости, теории пластичности и т. д. прослеживается распределение внутренних усилий в теоретической модели конструкции. Далее сравнивают

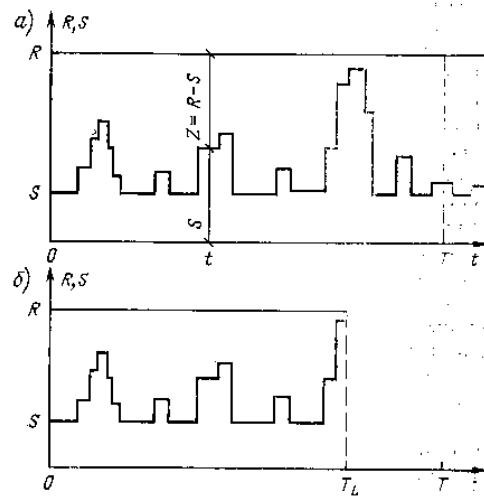


Рис. 1.1. Реализация изменений во времени нагрузки и сопротивления  $R$  в некотором поперечном сечении

$a$  — за время службы отказ не происходит;  $б$  — отказ в момент  $T_L < T$ , вследствие превышения уровня  $R$  величиной  $S$

ся внутренние усилия со свойствами предполагаемых материалов и на этой основе принимается решение.

В связи с этим статический расчет имеет характер прогноза. Он говорит нечто о поведении еще несуществующей конструкции. Между теоретической моделью в статическом расчете и будущей реальностью в период срока службы сооружения, естественно, не может быть точного соответствия. Отклонения теоретического представления модели на основе статического расчета от будущей реальной конструкции в период срока ее службы можно разделить на две группы: систематические отклонения и случайные.

Систематические отклонения или неточности модели возникают за счет несовершенства методов расчета. Любая теоретическая модель содержит ряд упрощающих предположений. Теория сосредоточивается на наиболее существенных факторах, пренебрегая второстепенными, с тем чтобы упростить расчет. Каждое упрощение приводит, однако, к определенному отклонению от реальной конструкции. Уменьшение систематических отклонений механической модели является

задачей классической строительной механики. Под влиянием быстрого развития вычислительной техники в последние годы были разработаны усовершенствованные механические модели, так что сегодня для многих конструкций, находящихся под действием заданных нагрузок, возможно определение внутренних усилий с большой степенью точности.

В практических расчетах мы имеем дело с детерминированными теориями и постоянными или переменными величинами, однако в действительности проблема носит стохастический характер.

Свойства строительных материалов несущей конструкции в той или иной мере отклоняются от их средних значений. Еще более это относится к свойствам грунтов. Это же касается геометрии конструкции и характеристик соединений элементов, которые подвержены влиянию случая. Действующие на сооружение нагрузки являются случайными функциями времени. Подобные случайные, или стохастические, отклонения до известной степени неизбежны, и человек может влиять на них только в очень узких рамках.

Учет случайных явлений проводится на стохастических моделях путем пробных испытаний. Однако для получения надежного статистического результата, как правило, требуется очень большое количество таких проб, чего нельзя добиться практически. В таком случае за счет недостатка статистической информации возникает обширный источник незнания, с которым приходится считаться.

Влияние случайных разбросов на безопасность и надежность конструкции может быть установлено только методами математической статистики и теории вероятностей. Исследования этой проблематики и составляют существо теории надежности несущих строительных конструкций.

Для практического использования приходится, однако, сильно упростить все зависимости. В нормах случайные влияния учитываются так называемыми элементами безопасности — нормативными значениями и коэффициентами запаса или частными коэффициентами надежности.

С введением оценки запаса на основе механической модели, наиболее приближенной к действительности, и обеспечением достаточного резерва прочности  $Z=R-S$  при учете влияния стохастических величин в проектной практике появляется возможность разработки проекта, в котором гарантировано достижение надежности сооружения при безошибочном исполнении проекта в строительстве.

## 1.2. МЕРЫ ПО ИСКЛЮЧЕНИЮ ОШИБОК ЧЕЛОВЕКА

Анализ возникающего ущерба показывает, что большинство случаев отказа вызывается за счет ошибок участвующих

в строительстве людей [1.1—1.7]. Ошибочные действия человека или невыполнение необходимых действий является причиной большинства случаев отказа.

Возможным источником ошибок выступает недостаточный уровень знаний каждой конкретной личности. В наше время непрерывного расширения и обновления научно-технических знаний и практического опыта отдельному человеку становится все труднее ориентироваться в окружающей действительности. Здесь неопределимую роль могут сыграть постоянное обучение и переобучение, имеющие своей целью снижение опасности неправильных действий.

Нарастающее расширение знаний ведет к усиливающейся специализации во всех областях. Все чаще большое число специалистов работают над общими задачами, которые становятся все сложнее и необозримее. В связи с этим растет значение обмена информацией между всеми участниками строительного процесса. Опасность ошибок становится большей вследствие того, что определенные точки зрения могут оказаться неучтенными, так как никто не отвечает за это. Следовательно, для безопасности сооружения первостепенную роль играет деятельность сознающего риск руководителя с ясным и четким распределением ответственности в коллективе и полным обеспечением информационного потока.

Потенциальную опасность представляют и ошибочные действия человека из-за халатности, попустительства и безответственности. Воспитание высокой рабочей морали, пробуждение интереса к нахождению надежных решений технических проблем играют здесь решающую роль.

Лишь немногие из человеческих ошибок нельзя предвидеть и предотвратить. Важнейшими средствами обнаружения ошибок и заблуждений являются наблюдение и контроль, составляющие, образно говоря, вторую линию обороны в борьбе против отказов и недоработок, сеть, которая вылавливает проскользнувшие ошибки. Контроль имеет не только прямую задачу — находить неблагоприятные отклонения; очень важно его косвенное психологическое влияние на качество строительства.

На практике контроль сегодня в большей степени полагается на опыт, знания и интуицию работников инженерного надзора. Системное руководство встречается редко. В будущем следует обратить внимание на развитие эффективной стратегии контроля, с тем чтобы направить усилия на решение таких проблем, которые имеют решающее значение для безопасности или при которых ошибочные действия встречаются наиболее часто.

Здесь нужно изучить опыт других отраслей. На воздушном транспорте, например, плотный контроль гарантируется контрольным листом. Многие ошибки совершаются только из-за

недостатка внимания со стороны лиц, принимающих решения, в нужный момент времени. Контрольный лист представляет упорядоченную последовательность вопросов, которые направляют внимание ответственного лица на наиболее часто по предыдущему опыту встречающиеся ошибочные действия. Контрольный лист не заменяет специальные знания, он является дополнительным накопителем памяти, который пробуждает знание в нужный момент времени. Контрольный лист предназначен не для дилетантов и необязательно должен быть понятен всем. Контролер должен обладать не только знаниями, но и авторитетом, чтобы добиться устранения выявленных ошибок. На воздушном транспорте таким контролером, проводящим проверку по контрольному листу, является сам пилот.

Ошибки человека не учитываются введением специального резерва прочности при проведении расчета. Сегодня нет таких нормативных документов, которые содержали бы частный коэффициент надежности по учету недостатков качества за счет ошибок человека.

### 1.3. МЕРЫ ПО ОГРАНИЧЕНИЮ РАЗМЕРА УЩЕРБА

Несмотря на обе вышеупомянутые стратегии по обеспечению безопасности, все же полностью избежать случаев отказа нельзя. Будь это определенные ошибки, проскользнувшие через сеть контроля, будь это чрезвычайные происшествия или экстремальные перегрузки в период срока службы конструкции, но отказы возможны. Перегрузки могут возникать от природных или техногенных воздействий, которые не были учтены в расчете и остались за рамками рассмотрения проблемы, например, возникновение волны сжатия при взрыве. Перегрузки могут возникнуть также и за счет отсутствия знаний у человека и его неправильных действий в процессе эксплуатации. Контроль и надзор на строительных объектах, как правило, ограничен этапами проектирования и возведения. Только на ответственных объектах, таких, как железнодорожные мосты, плотины, атомные станции, контроль продолжается и на стадии эксплуатации. Большая же часть сооружений после окончания их строительства предоставлена сама себе, и часто пользователь даже не осведомлен о пределах допустимых нагрузках на сооружение.

Несмотря на оценку надежности и на контроль в процессе проектирования и строительства, следует исходить из того, что невозможно полностью избежать случаев отказа. Тогда остается третья и последняя возможность обеспечения безопасности — спроектировать конструкцию так, чтобы при возникновении отказа снизить неблагоприятные последствия и, прежде всего, избежать смертельных случаев. Для этого

следует при проектировании конструкции исключить вероятность внезапного полного хрупкого ее обрушения, а также обеспечить возможность усиления конструкции при появлении предвестников обрушения и эвакуировать при необходимости людей.

Этому способствует выбор таких статических систем, в которых выход из строя одного элемента не ведет к внезапному и полному отказу всей системы. Кроме того, необходимо использовать такие материалы и конструкции, которые обладают способностью к большим деформациям. Возможность разрушения за счет образования трещин или появления больших деформаций должна быть понятна и неспециалисту.

Такие соображения не новы, к этому всегда стремится инженер-строитель. Но сегодня наметилась тенденция систематизировать эти принципы и подвести под них научную основу. Например, имеются предложения [1.8], при проектировании сейсмостойких железобетонных конструкций подразделять сооружения на три класса по их значимости; для каждого класса устанавливаются различные правила расчета и конструирования с тем, чтобы получить различные уровни деформирования в момент разрушения.

### 1.4. ТРАДИЦИОННЫЙ ЭМПИРИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БЕЗОПАСНОСТИ

Запас прочности между нагрузкой и несущей способностью с учетом случайных и систематических отклонений обеспечивается сегодня при проектировании следующими мерами:

1. При больших разбросах значений нагрузок в расчете принимаются величины, которые редко могут быть превзойдены, а при больших разбросах характеристик материалов принимаются те, ниже которых значения параметров встречаются редко.

2. Алгоритмы расчета строятся на предположениях, которые обеспечивают запас прочности. В сомнительных расчетных ситуациях предпочтительно принимать больший запас прочности, т. е. большие поперечные сечения элементов. За счет этого систематические отклонения чаще всего приводят к допустимым запасам. Другое дело, что величины этих запасов остаются неизвестными.

3. Запас прочности увеличивается введением общего коэффициента запаса или многих частных коэффициентов надежности.

4. Предпочтение отдается тем конструкциям, которые изначально имеют определенные резервы безопасности. Так, преимущественно используются статически неопределимые системы и материалы с большой способностью к деформированию, что обеспечивает перераспределение внутренних усилий.

Нормативные значения и коэффициенты запаса задаются в нормах. За счет этого часть решений, которые должен принимать проектировщик под давлением требований безопасности и экономии, передается от отдельного индивидуума официальным учреждениям. Это частично освобождает проектировщика от ответственности и обеспечивает ему определенную юридическую защиту.

Безопасность сооружения обеспечивается ответственностью изготовителя строительных материалов и производителя работ за качество материала, ответственностью пользователя за соблюдение верхних границ нагрузок, ответственностью проектировщика за проектирование и конструирование при безупречном выполнении проверок на надежность на основе возможно более точной механической модели и ответственностью властей за приемлемый для общества уровень надежности, определяемый назначенными нормативными величинами, коэффициентами запаса и надежности.

На чем основываются требования по надежности, содержащиеся в нормах? Для большинства норм можно уверенно сказать: основой требований по надежности является опыт предыдущего строительства. Требования по надежности большей частью основаны не на теории и не на науке. Так, например, коэффициенты запаса не вычисляются, а назначаются экспертами и утверждаются властями. Основой при этом является опыт, интуиция, возможно, анализ зарубежных норм и рекомендации международных организаций.

Рассмотрим подробнее механизм учета опыта предыдущего строительства. Для этого механизма имеет большое значение одно характерное свойство проблемы надежности. Она становится заметной только при появлении отказов конструкций с недостаточным запасом прочности. При наличии запаса этого не наблюдается, конструкции с большими резервами оказываются пригодными для длительной эксплуатации.

На основе этого свойства на рис. 1.2 представлен механизм накопления опыта. Проверка на надежность производится на фазе эксплуатации несущей конструкции. Если эта фаза протекает без случаев отказа, то после относительно длительного периода времени у специалистов появляется подозрение, что здесь должны быть, излишне большие резервы надежности. На основе этого запас прочности снижают, назначив, например, меньшие коэффициенты запаса.

Если, наоборот, встречаются частые или вызывающие интерес общественности и специалистов случаи отказов, когда ни одно из нормативных требований не нарушено из-за ошибок человека, то повышают запас прочности, например увеличением коэффициентов запаса, которое обычно превосходит действительно необходимое и в дальнейшем корректируется.

Этот эмпирический путь никоим образом не основан на реальных функциональных связях, а ориентирован лишь на последствия. Подобный образ действий называют методом

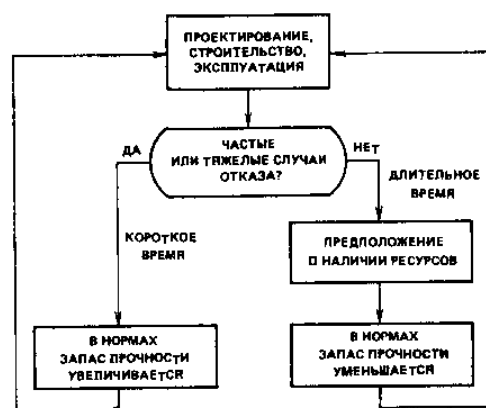


Рис. 1.2. Назначение элементов безопасности в нормах на основе опыта

проб и ошибок (рис. 1.3). Он может пониматься как эмпирическая стратегия оптимизации. При этом отыскивается такой резерв прочности, при котором требуется минимальный расход материала или обеспечивается уровень безопасности, устраивающий общество.

Что при этом понимается под словами «устраивает» или «не устраивает», «надежный» или «ненадежный», остается в высшей степени неопределенным и различным от случая к случаю. Так, например, известно, что люди могут добровольно подвергать себя куда большему риску, чем тот, который они считают приемлемым.

Если оценивать этот традиционный эмпирический прием, то следует заметить, что в прошлом строительстве он себя оправдал. В длительном процессе развития аккумулируется огромный опыт, который нашел отражение в нормах конструирования, расчета, строительства и контроля.

В последнее время, однако, усилились стремления решать проблемы надежности в технике научными методами. Причин этому много, попытаемся выявить некоторые из них.

С быстрым развитием техники возникают новые проблемы безопасности, при которых механизм накопления опыта не работает. Это прежде всего проблемы, последствия отказа в которых обширны, но сама вероятность отказа чрезвычайно мала. В качестве примера можно привести АЭС, где отказы

весьма редки. Однако и здесь основной задачей является обеспечение безопасности ограниченными средствами.

Для накопления опыта требуется время, а с ускорением технического прогресса растет опасность, что при неправильных оценках появятся громадные потери. Анализ накопленного опыта показал, что мы не просто медленно приближаемся к оптимальному решению, но и вообще не можем гарантировать его достижение. Многие резервы надежности остаются

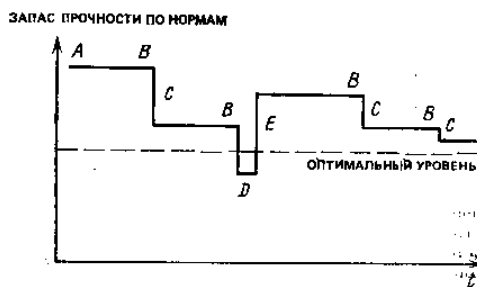


Рис. 1.3. Изменение во времени оптимального уровня надежности на основе опыта

A — большой запас по нормам как начальное состояние; B — растущее доверие к нормам за счет положительного опыта; C — снижение запаса прочности; D — частые или тяжелые случаи отказов; E — повышение запаса прочности

скрытыми. Жесткие требования экономии материала заставят нас в будущем изыскивать эти резервы научными методами.

Возникают нарастающие диспропорции при расчетной оценке надежности. Методами технической механики, сопротивления материалов, статики и динамики мы со все большей точностью находим распределение внутренних сил в конструкции при данных нагрузках. Эта возможность существенно расширена в последние годы развитием вычислительной техники, что позволяет проводить на практике обширные теоретические исследования конструкций. Однако все эти успехи ставятся под сомнение, если вспомнить, что принимаемые на входе нагрузки и надежность конструкций на выходе представляют собой результат эмпирических оценок.

Правда, введением в нормы большого числа частных коэффициентов надежности, с одной стороны, мы добиваемся большей гибкости нормативных требований, но, с другой стороны, оптимальное назначение этих коэффициентов становится проблемой, которая на основе учета предыдущего опыта или неразрешима, или решается очень несовершенно. Научные мето-

ды определения нормативных коэффициентов надежности в связи с этим выглядят жизненно необходимыми.

Отсутствие рациональных основ ведет к тому, что в нормах разных стран отсутствует единство подхода к назначению элементов безопасности. Стреллер [1.9] сравнил различные назначения нагрузок в нормах стран Европы. Они оказались отличающимися в некоторых случаях на 100%, что наводит на подозрения о «произволе» в их назначении. Различаются не только нормативные значения, но и полученные на их основе проекты сооружений.

### 1.5. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА БЕЗОПАСНОСТИ — ОБЗОР МЕТОДОВ

Осознание недостатков эмпирических подходов неново. Критика появилась в 20-х годах в работах М. Майера [1.10], который первым предложил исследовать проблемы безопасности методами математической статистики и теории вероятностей.

С тех пор появилось большое число работ по проблеме научно обоснованного запаса между воздействием и несущей способностью. Предлагаемые в этих работах подходы и методы различны: от чисто прагматических, ориентированных на практику методов, основанных на попытках улучшить оценки общего коэффициента запаса, оставаясь в рамках традиционных концепций, до теоретических работ, в которых делается попытка усовершенствовать механические модели и оперировать вероятностными методами.

Эти различные подходы предлагается разделить по уровням [1.11, 1.12], в зависимости от характера принятых допущений и определения меры безопасности:

**Уровень 1. Методы расчета с частными коэффициентами надежности.** Оценка надежности  $S \leq R$  выполняется детерминистически, отдельно для каждого предельного состояния. Необходимая безопасность достигается системой частных коэффициентов надежности, подверженных различным рассеивающим влияниям и вводимых к нормативным значениям, которые определяются как характеристические (фрактили или квантили). На практике за этим методом укоренилось не очень подходящее название «метод предельных состояний».

**Уровень 2. Теория надежности 1-го порядка и методы моментов.** Оценка надежности выполняется приближенными методами теории надежности, которые учитывают выбранную точку поверхности предельного состояния в пространстве базисных переменных и предполагают определенные упрощения уравнения предельного состояния, а возможно, и функций распределения. Мерой безопасности является так называемый



индекс безопасности или эквивалентная оперативная вероятность отказа.

**Уровень 3. Теория надежности.** Оценка надежности выполняется «точными» методами теории надежности для системы в целом или для ее отдельных элементов при полном учете функций распределения базисных переменных и уравнений предельного состояния. Мерой безопасности является оперативная вероятность отказа.

**Уровень 4. Оптимизационные методы теории надежности.** Назначение размеров сечений несущей конструкции выполняется с учетом экономических данных, так, чтобы среднее значение суммы всех затрат за период эксплуатации с учетом возможных затрат при отказе было минимальным. Другие стратегии оптимизации максимизируют прибыль от эксплуатации сооружения [1.13]. Основой оценки безопасности является выбираемая целевая функция.

В последующем изложении в разд. 3 будут представлены методы уровней 2—4, а в разд. 4 — практические модели уровня 1. В разд. 5 будут рассмотрены вопросы использования более высоких уровней в нормах, основанных на уровне 1.

В обозримом будущем практические расчеты для большинства сооружений будут выполняться по нормам, основанным на методах уровня 1, т. е. с помощью частных коэффициентов надежности. Областью применения более высоких уровней останутся особо ответственные сооружения. Методы уровня 2 будут служить для усиления рациональной основы норм, использующих методы уровня 1. Уровни 3 и 4 и дальше будут применяться только в научных исследованиях.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СВОЙСТВ КОНСТРУКЦИЙ И НАГРУЗОК НА НИХ

### 2.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Многие события и процессы в технике подвержены случайностям, т. е. нельзя с уверенностью предсказать, каков будет исход процесса или какое значение примет случайная величина. В лучшем случае могут быть приняты вероятностные предсказания.

В теории вероятностей явления случайного характера описываются случайными событиями, величинами или функциями.

Случайное событие  $A$  есть событие, которое в зависимости от случая может произойти или не произойти. Событие, которое имеет главное значение в теории надежности несущих конструкций, есть переход через предельное состояние за срок службы сооружений. Определение вероятности этого события является важной задачей теории надежности.

Случайная величина  $X$  есть величина, которая в зависимости от случая может принимать различные значения. Свойства строительных материалов и грунтов, экстремальные значения нагрузок в определенном интервале времени (наибольшие и наименьшие) и геометрические размеры конструкции представляют примеры случайных величин.

Неточности модели, возникающие вследствие систематических ошибок теории, также могут быть представлены случайными величинами, которые определяются следующим образом:

$$X = \frac{\text{фактическое значение}}{\text{предсказанное (теоретическое) значение}} \quad (2.1)$$

Если случайная величина принимает бесконечное множество значений в определенной области, она называется непрерывной. Случайные величины, которые могут принимать только конечное множество значений, называются дискрет-

ными случайными величинами. Примером дискретной случайной величины может служить случайное число нагружений в заданном интервале времени.

Многие нагрузки меняют свою интенсивность в зависимости от времени и места. Такие явления математически моделируются случайными функциями. Если рассматривается только изменение во времени, то говорят о случайных процессах, при многомерной зависимости (например, от времени и места) говорят о случайных полях [2.4].

По отношению к реакции механической системы нагрузки можно разделить на две группы:

1) если изменчивость нагрузок во времени соизмерима с собственными частотами и в связи с этим можно ожидать возникновения колебаний, то говорят о динамических нагрузках или о нагрузках с микроизменениями во времени; эти нагрузки и реакция системы на них могут быть описаны как непрерывные случайные процессы (см. далее рис. 2.8);

2) если изменчивость нагрузок во времени лежит вне области собственных частот несущей конструкции, то говорят о статических нагрузках, или нагрузках с макроизменениями во времени; изменение нагрузок протекает в интервалах времени, измеряемых часами, сутками, годами или десятилетиями (нагрузки от снега, мебели, складываемых предметов или давления земли); такие нагрузки можно приближенно представить в виде последовательности импульсов прямоугольной формы со случайными интенсивностями и длительностями (см. далее рис. 2.7).

Более гибкие стохастические модели, с помощью которых можно помимо случайной интенсивности нагрузок отразить и случайные моменты времени их приложения, и случайные длительности действия, образуют так называемые импульсные процессы (см. далее рис. 2.9). Если нагрузки меняются как в микро-, так и в макрообластях времени, то их можно представить вложением непрерывного процесса на импульсный. При этом появляются процессы, показанные далее на рис. 2.15. В этой книге они называются «прерывными континуальными процессами». Примерами служат землетрясения, ветровые нагрузки и воздействия волн. Для очень многих проблем интерес представляют только экстремальные значения нагрузок, возникающие за срок службы сооружения. В этом случае нагрузки представляются в виде случайных величин с экстремальным распределением. Далее приведены определения, необходимые при оперировании с такими случайными величинами. При этом опускаются строгие определения и доказательства, упор делается на практическое применение. Несколько подробнее рассматриваются проблемы, тесно связанные с теорией надежности несущих конструкций и недостаточно освещенные, а то и отсутствующие в литера-

туре по теории вероятностей. Для более углубленного изучения следует рекомендовать книги Смирнова и Дунина-Барковского [2.1], Шторма [2.2], Фиша [2.3], Хайнриха и Хенцига [2.4], Кохеля [2.5], Свешникова [2.6], Гумбеля [2.7].

## 2.2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Рассмотрим событие  $A$ , которое в результате опыта, в зависимости от случая может произойти или не произойти. Если провести  $n$  опытов и при этом  $h_n(A)$  раз событие  $A$  появится, то можно ввести следующие понятия:  $h_n(A)$  — абсолютная частота;  $\omega_n(A) = h_n(A)/n$  — относительная частота;  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} [h_n(A)/n]$  — вероятность.

При безграничном возрастании  $n$  относительная частота стремится к вероятности события. Обе величины могут принимать значения от нуля до единицы.

Каждому событию  $A$  можно сопоставить противоположное событие  $\bar{A}$ , которое состоит в том, что событие  $A$  не происходит.  $\bar{A}$  означает отрицание  $A$ :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (2.2)$$

Если рассматривать два события  $A$  и  $B$ , то можно определить связи событий, которые вновь являются событиями.

Объединением, а также дизъюнкцией, альтернативой или логической суммой  $A \cup B$  называют событие, которое состоит в выполнении события  $A$  или  $B$  (рис. 2.1).

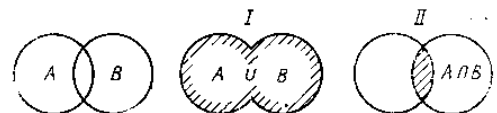


Рис. 2.1. Объединение и пересечение двух событий в диаграмме Венна  
I — объединение  $A$  или  $B$ ; II — пересечение  $A$  и  $B$

Пересечением, а также конъюнкцией или логическим произведением  $A \cap B$  называется событие, которое состоит в появлении событий  $A$  и  $B$  одновременно.

Для дополнений к связям событий применимо так называемое правило Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (2.3)$$

Условной вероятностью  $P(A/B)$  называется вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что имело место событие  $B$ :

$$P(A/B) = \lim_{n_B \rightarrow \infty} \frac{h_{AB}(A)}{n_B}, \quad (2.4)$$

где  $n_B$  — число исходов, при которых встречалось событие  $B$ ;  $h_{AB}(A)$  — число исходов, при которых кроме  $B$  имело место и событие  $A$ .

Два события взаимно исключают друг друга, если их пересечение пусто:  $A \cap B = 0$  (где  $0$  — невозможное событие).

События  $A$  и  $B$  взаимно независимы, если, например, наступление события  $A$  не зависит от того, имеет место событие  $B$  или нет. При этом  $P(A/B) = P(A)$ .

Связям событий соответствуют правила определения вероятностей:

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A/B) P(B); \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B); \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B); \\ P(A \cup \bar{B}) &= P(B) + P(A \cap B). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где  $\bar{B}$  — событие, противоположное  $B$ .

В случае независимых событий:

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) P(B); \\ P(A \cap B) &= 1 - [1 - P(A)] [1 - P(B)] = \\ &= P(A) + P(B) - P(A) P(B). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Для взаимоисключающих событий:

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= 0; \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Эти правила можно распространить на случай счетного множества событий  $A_1, A_2, \dots, A_k$  (где  $k=2, 3, 4, \dots$ ):

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_k/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}); \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) &= \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k P(A_i \cap A_j) - \\ &+ \dots - (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^k P(A_i \cap A_2 \cap \dots \cap A_k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

При системе полностью независимых событий:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \prod_{i=1}^k P(A_i); \quad (2.10)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - P(A_i)]. \quad (2.11)$$

При взаимоисключающих событиях:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = 0; \quad (2.12)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i=1}^k P(A_i). \quad (2.13)$$

### 2.3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

#### 1. ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

##### Функция распределения и его плотность

Действительная переменная  $X$ , которая в зависимости от исхода опыта и от случая может принимать различные значения, называется случайной величиной. Функцией распределения  $F_X(x)$  случайной величины  $X$  называют функцию

$$F_X(x) = P(X \leq x). \quad (2.14)$$

Значение функции распределения при текущей переменной равно вероятности того, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее или равное  $x$ . Функцией распределения  $F_X(x)$  полностью характеризуется случайная величина  $X$ . Во многих задачах оказывается целесообразным оперировать с дополнением к функции распределения:

$$G_X(x) = 1 - F_X(x). \quad (2.15)$$

С помощью функции распределения можно найти вероятность того, что  $X$  попадет в интервал  $(x_1, x_2)$ :

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1). \quad (2.16)$$

Функция распределения имеет следующие свойства:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) &= 1; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \text{ при } x_1 < x_2. \quad (2.18)$$

Для практических приложений имеют значение дискретные, непрерывные и смешанные случайные величины. На рис. 2.2 представлены примеры функций распределения.

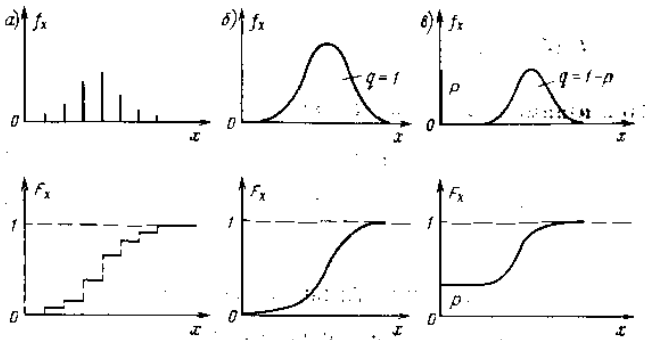


Рис. 2.2. Примеры различных видов плотностей распределения вероятностей  $f(x)$  и функций распределения  $F(x)$ .

а — дискретное распределение; б — непрерывное; в — смешанное;  $q$  — площадь

Случайная величина  $X$  называется дискретной, если она может принимать конечное или счетное бесконечное множество значений. Она характеризуется значениями  $x_1, x_2, \dots$ , которые она может принимать, и вероятностями  $p_i = P(x = x_i)$ , с которыми она принимает эти значения. Для дискретных случайных величин:

$$\sum_i p_i = 1; \quad (2.19) \quad F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i \quad (2.20)$$

Последняя сумма берется по всем  $i$ , для которых  $x_i \leq x$ . Функция распределения имеет ступенчатый вид с высотой ступени  $p_i$  в точках  $x_i$ .

Случайная величина  $X$  называется непрерывной, если в опыте она может принимать любое значение из одного или многих интервалов числовой оси. Для непрерывной случайной величины:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}; \quad (2.21)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du; \quad (2.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1; \quad (2.23)$$

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx; \quad (2.24)$$

$$P(X = x_1) = 0. \quad (2.25)$$

Плотность распределения  $f_X(x)$  является производной от функции распределения. Площадь под кривой плотности распределения равна 1. Вероятность того, что  $X$  попадет в интер-

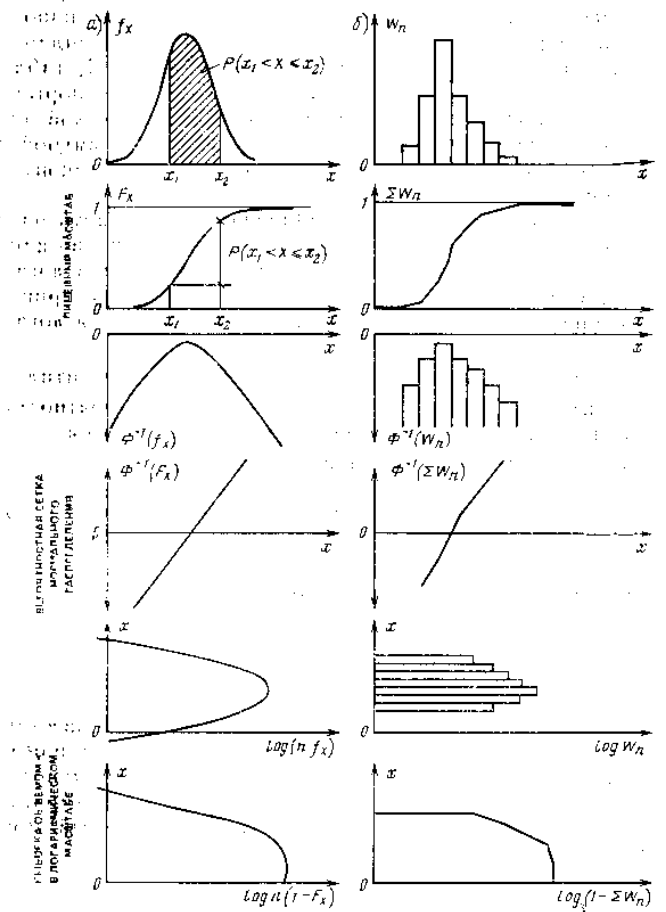


Рис. 2.3. Различные формы представления непрерывных случайных величин и выборок

а — случайная величина; б — гистограмма

вал  $(x_1, x_2)$ , представляет величину интервала от  $f_X(x)$  по этому интервалу (рис. 2.3). Вероятность того, что непрерывная случайная величина  $X=x_1$ , равна нулю.

На рис. 2.3 в различных графических формах представлены функция и плотность распределения нормальной непрерывной случайной величины в обычном линейном масштабе и в вероятностной сетке нормального распределения. Там же представлены гистограммы классического вида. Вторая форма представления появляется, если на ординаты наносятся значения обратной функции распределения для стандартного нормального распределения  $\Phi^{-1}(F)$  (см. прил. II, табл. 4). В таком масштабе функция распределения всех нормально распределенных случайных величин имеет вид прямой линии. Эта форма служит прежде всего для простой наглядной проверки выборок на соответствие их нормальному закону распределения.

В задачах усталости целесообразно представлять распределение разностей напряжений или пиков напряжений как так называемых коллективов напряжений объемом  $n$  в логарифмическом масштабе. На рис. 2.3 внизу показаны принципы такого представления. Часто и по оси  $x$  выбирается логарифмический масштаб.

В качестве квантиля или фактиля  $x_q$  ( $q$ -квантиль или  $q$ -фактиль) вводится величина  $x$ , которая с вероятностью  $q$  не превышает, а с вероятностью  $1-q$  превышает.

Для непрерывной случайной величины

$$\left. \begin{aligned} P(X \leq x_q) = F_X(x_q) = q; \\ x_q = F_X^{-1}(q). \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

0,5-квантиль называется также медианой.

### Моменты

На практике или функции распределения не известны во всех деталях, или описание случайных величин с помощью функций распределения связано с большими трудностями. В этом случае можно представить упрощенные характеристики случайных величин их моментами. Как  $i$ -тый момент случайной величины  $X$  вводится:

$$\left. \begin{aligned} m_i = \sum_k x_k^i p_k, \text{ если } X \text{ дискретна;} \\ m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_X(x) dx, \text{ если } X \text{ непрерывна.} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

В качестве  $i$ -того центрального момента принимается:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i = \sum_k (x_k - m_1)^i p_k, \text{ если } X \text{ дискретна;} \\ \mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^i f_X(x) dx, \text{ если } X \text{ непрерывна.} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Между моментами  $m_i$  и центральными моментами существуют следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 = 0; \\ \mu_2 = m_2 - m_1^2; \\ \mu_3 = m_3 - 3 m_1 m_2 + 2 m_1^3; \\ \mu_4 = m_4 - 4 m_1 m_3 + 6 m_1^2 m_2 - 3 m_1^4; \\ \mu_5 = m_5 - 5 m_1 m_4 + 10 m_1^2 m_3 - 10 m_1^3 m_2 + 4 m_1^5. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Некоторые моменты и полученные с их помощью величины играют особую роль и для них вводятся специальные обозначения.

Среднее значение  $m_1$  или математическое ожидание  $E[X]$  случайной величины  $X$  равно моменту 1-го порядка  $m_1$ .

Вариация или дисперсия  $\text{Var}[X]$  равна второму центральному моменту:

$$\text{Var}[X] = \mu_2, \quad (2.30)$$

а стандартное отклонение есть корень из него:

$$\sigma_X = \sqrt{\mu_2}. \quad (2.31)$$

Обе величины служат мерой разброса случайной величины. Коэффициент вариации

$$v_X = \sigma_X / m_X \quad (2.32)$$

выражает: относительной, отнесенной к среднему, мерой разброса. Коэффициент асимметрии

$$\gamma_X = \mu_3 / \sqrt{\mu_2^3} = \mu_3 / \sigma_X^3 \quad (2.33)$$

служит мерой асимметрии распределения. При симметричном распределении  $\gamma_X = 0$ .

Эксцесс

$$e_X = \mu_4 / \mu_2^2 - 3 = \mu_4 / \sigma_X^4 - 3 \quad (2.34)$$

выражает мерой для формы вершины распределения. Для нормального распределения  $e_X = 0$ . Для  $e_X > 0$  вершина острее, а для  $e_X < 0$  вершина более пологая, чем в случае нормального распределения.

Понимание этих характеристик несколько упростится, если провести некоторые аналогии с известными величинами меха-

ники. Так моменты распределения вероятностей эквивалентны моментам площадей под кривой плотности распределения. Центральные моменты представляют собой моменты этих площадей относительно центра тяжести. Математическое ожидание, или среднее, — есть центр тяжести, вариация представляет момент инерции, а стандартное отклонение — радиус инерции этой площади.

### Некоторые практически важные распределения

Некоторые распределения вероятностей непрерывных величин имеют особое значение в теории надежности несущих конструкций. Для облегчения пользования ими в прил. II дается исчерпывающая сводка формул. Что касается распределений других типов, то следует обратиться к специальной литературе.

**Нормальное распределение.** Большинство задач может быть решено достаточно просто, если базисные переменные имеют нормальное распределение, а уравнения предельных состояний являются линейными функциями этих базисных переменных. Имеющиеся для этого особого случая решения часто образуют основу для разработки приближенных решений более общих проблем.

Однако особая роль нормального распределения вытекает не только из удобства расчета при линейных функциях. Является непереложным фактом то обстоятельство, что в природе и технике часто наблюдаются случайные величины, подчиняющиеся нормальному распределению или подобному ему. Объяснение этому дает центральная предельная теорема теории вероятностей, которая гласит: если случайная величина образована как сумма большого числа взаимонезависимых случайных слагаемых, вклад каждого из которых в сумму невелик, то эта случайная величина приближенно может быть представлена как нормально распределенная [2.8].

Нормальное распределение со средним  $m_x$  и стандартным отклонением  $\sigma_x$  имеет следующие плотность и функцию распределения:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right]; \quad (2.35)$$

$$F_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{u-m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] du.$$

Плотность распределения имеет форму известной колоколообразной кривой. Она симметрична. Расстояние между точкой перегиба и средним равно  $\sigma_x$ .

Если ввести стандартизованную случайную величину

$$Y = (X - m_x) / \sigma_x$$

с математическим ожиданием  $m_y = 0$  и стандартным отклонением  $\sigma_y = 1$ , то плотность распределения

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right), \quad (2.36)$$

а функция распределения

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp \left( -\frac{u^2}{2} \right) du. \quad (2.37)$$

С использованием этих функций уравнения (2.35) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} f_x(x) &= \frac{1}{\sigma_x} \varphi \left( \frac{x-m_x}{\sigma_x} \right); \\ F_x(x) &= \Phi \left( \frac{x-m_x}{\sigma_x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Во многих руководствах по теории вероятностей (например, [2.1, 2.3]) можно найти таблицы функций  $\varphi$  и  $\Phi$ . Для функций  $\Phi$  и обратной к ней  $\Phi^{-1}$  удобные выражения с высокой точностью даны в работе [2.9]; эти выражения легко программируются для ЭВМ, так что сегодня едва ли есть смысл работать с таблицами. Две достаточно точных и легких формулы даны в прил. II, в табл. 3 и 4.

В литературе и в описаниях программ иногда вводятся несколько по-иному определенные функции для представления нормального распределения. Они обозначаются через  $\Phi_0$ ,  $\text{erf}$  или  $\text{erfc}$ , что может привести к путанице при практическом применении. Поэтому в прил. II, табл. 2 приведены определения этих функций и формулы взаимного преобразования. Ниже для представления нормального распределения используется только функция  $\Phi$ .

Исключительно важное свойство нормального распределения: линейная комбинация нормально распределенных случайных величин  $Z = \sum c_i X_i$  является также нормально распределенной со средним

$$m_z = \sum c_i m_{x_i} \quad (2.39)$$

и стандартным отклонением

$$\sigma_z = \sqrt{\sum (c_i \sigma_{x_i})^2}. \quad (2.40)$$

При этом функция распределения случайной величины  $Z$

$$F_z(z) = \Phi \left( \frac{z-m_z}{\sigma_z} \right).$$

Нормальное распределение часто применяется как математическая модель базисных переменных. Негативно влияет при этом тот факт, что плотность распределения распространяется в обе стороны до бесконечности. В практических же приложениях чаще всего встречаются величины, которые никогда не принимают отрицательных значений (например, прочность, плотность). Если такие величины представлять с помощью нормального распределения, то возникнет ошибка, которая будет увеличиваться с повышением коэффициента вариации. При больших коэффициентах вариации часто целесообразно выбрать теоретическую модель, имеющую нижнюю границу, которая не будет пересечена с вероятностью 1. Подобную модель представляет, например, логарифмически нормальное распределение.

**Логарифмически нормальное распределение.** Если случайная величина  $U$  нормально распределена с математическим ожиданием  $m_U$  и стандартным отклонением  $\sigma_U$ , то случайная величина

$$X = \exp(U) \quad (2.41)$$

распределена логарифмически нормально, или логнормально. Заменив в уравнении (2.38) получим функцию распределения  $X$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - m_U}{\sigma_U}\right), \quad (2.42)$$

а после дифференцирования — плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_U x} \varphi\left(\frac{\ln x - m_U}{\sigma_U}\right). \quad (2.43)$$

Для вычисления этих функций можно использовать таблицы или приближенные формулы нормального распределения.

Логнормальная случайная величина с вероятностью 1 не может принимать отрицательных значений и имеет нижнюю границу распределения при  $x=0$ . Она всегда имеет положительный коэффициент асимметрии.

Из центральной предельной теоремы следует, что случайная величина  $X$  имеет логнормальное распределение, если она может быть представлена произведением очень большого числа независимых случайных величин  $X_i$ .

Для малых значений коэффициента вариации логнормальное распределение приближается к нормальному, причем

$$\sigma_U \approx U_X, \quad m_U \approx \ln m_X. \quad (2.44)$$

Обобщение логнормального распределения можно получить, сдвигая его по оси  $x$  так, что нижняя граница будет не

$x=0$ , а любое значение  $x=x_0$ . В этом случае функция распределения

$$F_X(x) = \Phi\left[\frac{\ln(x-x_0) - m_U}{\sigma_U}\right] \quad (2.45)$$

и плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_U(x-x_0)} \varphi\left[\frac{\ln(x-x_0) - m_U}{\sigma_U}\right]. \quad (2.46)$$

В этой обобщенной форме логнормальное распределение имеет три свободных параметра и в связи с этим очень легко подгоняется под полученную гистограмму. Эта форма часто используется для моделирования прочностных и других свойств материалов. Исчерпывающая сводка формул приведена в прил. II, табл. 5.

**Распределения экстремальных значений.** Фундаментальную роль в надежности несущих конструкций играют наибольшее и наименьшие значения последовательности случайных величин. Так, в задачах прочности и устойчивости наибольшее значение нагрузки за срок службы играет решающую роль. Однако представляют интерес и наименьшие значения сопротивления элементов сооружения.

Оценка распределения вероятностей таких экстремальных значений ведется на основе теории экстремальных распределений, важнейшие соотношения из которой приводятся ниже. Обстоятельное описание теории можно найти в книгах Гумбеля [2.7] или Верличека [2.10].

Рассмотрим следующую задачу: дана случайная величина  $X$  с функцией распределения  $F_X$  и плотностью распределения  $f_X$ . Из совокупности  $X$  выберем ряд независимых реализаций этой случайной величины объемом  $n$ . Наибольшее значение  $U_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  и наименьшее значение  $V_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  являются также случайными величинами. Найдем распределение этих экстремальных значений, если известно распределение  $X$ .

Функция распределения  $F_U(x)$  наибольшего значения представляет вероятность того, что все величины  $X_i$  меньше, чем  $x$ :

$$F_U(x) = P(U_n \leq x) = P(X_1 \leq x \cap X_2 \leq x \cap \dots \cap X_n \leq x).$$

Если  $X_i$  независимы друг от друга, то из формулы (2.10) следует:

$$F_U(x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = [F_X(x)]^n. \quad (2.47)$$

Аналогичные рассуждения относительно наименьшего значения приводят к выражению

$$F_V(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n. \quad (2.48)$$

Путем дифференцирования найдем функцию плотности для наибольших значений

$$f_U(x) = n [F_X(x)]^{n-1} f_X(x) \quad (2.49)$$

и для наименьших

$$f_V(x) = n [1 - F_X(x)]^{n-1} f_X(x). \quad (2.50)$$

Симметричные исходные распределения имеют несимметричные распределения экстремальных значений. Однако между экстремальными распределениями наибольших и наименьших значений при симметричных исходных распределениях со средним  $m_X$  существуют следующие условия симметрии:

$$\left. \begin{aligned} F_V(x) &= 1 - F_U(2m_X - x); \\ f_V(x) &= f_U(2m_X - x); \\ \frac{df_V(x)}{dx} &= - \frac{df_U(2m_X - x)}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Плотность распределения наименьших значений получается из плотности распределения наибольших значений с помощью математического ожидания исходного распределения и наоборот.

Если ветвь исходного распределения асимптотически уходит в бесконечность, то и распределение экстремальных значений с увеличением  $n$  также не ограничено. Если исходное распределение ограничено, то и распределение экстремальных значений ограничивается этим значением, приближаясь к нему с увеличением  $n$ , причем стандартное отклонение становится все меньше. Рис. 2.4 поясняет это свойство на примере логнормального распределения с неограниченной ветвью в направлении положительной оси и с ограничением  $x=0$  слева.

**Асимптотические распределения экстремальных значений.** В теории распределений экстремальных значений [2.7, 2.10] исследуется вопрос: к каким распределениям они стремятся с увеличением  $n$ . Подобные распределения называются асимптотическими распределениями.

Очевидно, что форма асимптотического распределения не зависит от средней части исходного распределения, а определяется характером функций распределения в районе нуля и единицы. Можно показать [2.7], что в зависимости от формы граничных областей исходных распределений существуют три типа асимптотических распределений экстремальных значений.

**Тип I.** Распределения не ограничены на обоих концах и имеют вид:

для наибольших значений

$$F_U(x) = \exp\{-\exp[-a(x-u)]\}; \quad (2.52)$$

для наименьших значений

$$F_V(x) = 1 - \exp(-\exp[a(x-u)]). \quad (2.53)$$

Этот тип называется распределением Гумбеля, или двойным экспоненциальным. У него два свободных параметра

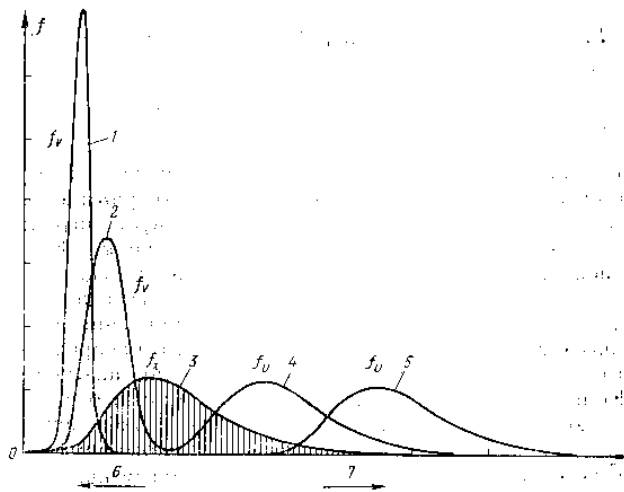


Рис. 2.4. Распределение экстремальных значений логнормального распределения как пример изменения плотности распределения ограниченной слева и не ограниченной справа

1 — распределение наименьших значений при  $n=100$ ; 2 — то же, при  $n=10$ ; 3 — исходное распределение; 4 — распределение наибольших значений при  $n=10$ ; 5 — то же, при  $n=100$ ; 6 — ветвь ограниченного распределения; 7 — ветвь неограниченного распределения

$a$  и  $u$ , которые легко связать со средним и стандартным отклонением. Коэффициент асимметрии и эксцесс являются константами и составляют  $\gamma_X = 1,1395$  и  $\epsilon_X = 2,4$ . Существуют все высшие моменты. Исходные распределения, которые сходятся к распределению типа I, относятся к так называемому экспоненциальному типу; это такие распределения, которые,



по меньшей мере, так же быстро сходятся к нулю или единице, как и экспоненциальное распределение. К этому типу относится и нормальное распределение. Экстремальные распределения типа I часто используются в теории надежности несущих конструкций для представления наибольших нагрузок за длительные интервалы времени.

**Тип II.** Распределения не ограничены со стороны соответствующего экстремального значения и ограничены с другой стороны точкой  $x_0$ :

для наибольших значений

$$F_U(x) = \exp[-\lambda(x-x_0)^{-k}] \quad \begin{matrix} x_0 \leq x < \infty \\ k, \lambda > 0; \end{matrix} \quad (2.54)$$

для наименьших значений

$$F_V(x) = 1 - \exp[-\lambda(x_0-x)^{-k}] \quad \begin{matrix} -\infty < x \leq x_0 \\ k, \lambda > 0. \end{matrix} \quad (2.55)$$

Этот тип называется распределением Фреше. В общем случае он обладает тремя свободными параметрами  $x_0$ ,  $\lambda$  и  $k$ . Правда, для этого распределения существует ограниченное число моментов, порядок которых меньше  $k$ . Коэффициент асимметрии для наибольших значений всегда больше, чем  $\gamma_k = 1,14$ , а для наименьших значений всегда меньше, чем  $\gamma_k = -1,14$ . Это свойство ведет к ограничению области практического применения типа II. Исходные распределения, которые сходятся к типу II, относятся к так называемому типу Коши с полиномиальной ниспадающей ветвью и с более слабой сходимостью к нулю по сравнению с экспоненциальным распределением. В практических приложениях тип II используется для представления ветровых нагрузок.

**Тип III.** Распределение со стороны соответствующего экстремального значения ограничено точкой  $x_0$ , а в противоположном направлении не ограничено:

для наибольших значений

$$F_U(x) = \exp[-\lambda(x_0-x)^k] \quad \begin{matrix} -\infty < x \leq x_0 \\ k, \lambda > 0; \end{matrix} \quad (2.56)$$

для наименьших значений

$$F_V(x) = 1 - \exp[-\lambda(x-x_0)^k] \quad \begin{matrix} x_0 \leq x < \infty \\ k, \lambda > 0. \end{matrix} \quad (2.57)$$

Распределение для наименьших значений называется также распределением Вейбула. В общем случае имеются три свободных параметра  $x_0$ ,  $\lambda$ ,  $k$  и существуют все моменты. К типу III приводят исходные распределения, которые имеют в направлении экстремального значения границу  $x_0$  и могут быть представлены в окрестностях этого значения степенным

рядом. Среди прочего этот тип используется для представления нагрузок с верхним пределом и для моделирования прочностных свойств, а также срока службы элементов в условиях усталостного разрушения.

Простыми преобразованиями все три типа можно представить в редуцированной форме (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Редуцированные распределения экстремальных значений

Тип	Преобразование	Функция распределения значений	
		наибольших	наименьших
I	$y = a(x-x_0)$	$\exp[-\exp(-y)]$	$1 - \exp(-\exp y)$
II	$y = \lambda^{-1/k}(x-x_0)$	$\exp(-y^{-k})$	$1 - \exp[-(-y)^{-k}]$
III	$y = \lambda^{1/k}(x-x_0)$	$\exp[-(-y)^k]$	$1 - \exp(-y^k)$

Практический интерес представляет вопрос, как выглядят распределения экстремальных значений, если исходные распределения являются асимптотическими распределениями этих трех типов.

Если ограничиться рассмотрением двух важных случаев «наибольшие значения из распределений наибольших значений» и «наименьшие значения из распределений наименьших значений», то легко показать, что распределения экстремальных значений есть распределения того же типа, что и исходные. Если применить уравнения (2.47) и (2.48) к распределениям из табл. 2.1, то результаты можно видеть в табл. 2.2, из которой следует, что распределение экстремальных значений при типе I получается сдвижкой по оси  $y$  на величину  $\ln n$ , а для двух других типов — искажением оси  $y$  на множитель  $n^{-1/k}$  для типа II и на  $n^{1/k}$  для типа III.

Таблица 2.2. Экстремальные распределения экстремальных значений

Тип	Наибольшие значения $F_U^n$	Наименьшие значения $1 - (1 - F_V)^n$
I	$\exp[-\exp(-y + \ln n)]$	$1 - \exp[-\exp(y + \ln n)]$
II	$\exp(-n y^{-k})$	$1 - \exp[-n (-y)^{-k}]$
III	$\exp[-n (-y)^k]$	$1 - \exp(-n y^k)$

Для всех трех типов распределений наибольших значений с увеличением объема выборки повышается и среднее значение. Стандартное отклонение для типа I не меняется, для типа II увеличивается, а для типа III уменьшается. Поведение функций плотности распределения для всех трех типов распределений наибольших значений представлено на рис. 2.5.

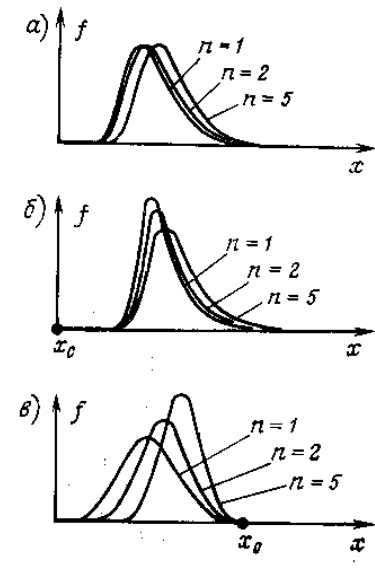


Рис. 2.5. Экстремальное распределение наибольших значений с увеличением объема выборки  
а — тип I; б — тип II; в — тип III.

В прил. II для трех типов асимптотических распределений экстремальных значений приведены сводки формул. Для встречающихся там гамма-функций даны приближенные формулы, которые легко использовать при программировании.

**Смешанные распределения.** Часто возникают ситуации, когда случайная величина состоит из двух и более случайных компонент. Два примера поясняют это обстоятельство.

Если на стройплощадке используется бетон из разных бетоносмесительных установок, причем характеристики бетонов имеют различные распределения, то распределение вероятностей для уложенного бетона является смешанным.

Осевые нагрузки возникают от экипажей разного типа, например от легковых и грузовых автомобилей, автофургонов. Каждый тип имеет свое распределение. Распределение вероятностей для совокупности всех осевых нагрузок, которое не-

обходимо знать для оценки надежности дорожного покрытия, появляется как смещение распределений различных типов экипажей в зависимости от вероятности их наличия в транспортном потоке.

Нельзя ожидать, что гистограмма подобной величины может быть приближена простым распределением стандартной формы. Смешанные распределения весьма разнообразны, они могут быть со многими вершинами. Поэтому при исследовании, безусловно, рекомендуется статистические данные по отдельным компонентам собирать отдельно.

Пусть  $X_i, i=1, 2, \dots, m$  есть непрерывные случайные величины с функциями распределения  $F_i$  и плотностями распределения  $f_i$ , которые с вероятностью  $P_i$  ( $\sum_{i=1}^m P_i = 1$ ) образуют смешение  $U$ . Тогда для функции распределения и плотности смешанного распределения  $F_U$ :

$$\left. \begin{aligned} F_U(x) &= \sum_{i=1}^m P_i F_i(x); \\ f_U(x) &= \sum_{i=1}^m P_i f_i(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Из формулы (2.27) получаем моменты любого порядка, в том числе и среднее значение:

$$m_U = \sum_{i=1}^m P_i m_{X_i}. \quad (2.59)$$

Средним значением является средневзвешенное из средних значений отдельных компонент.

Правда, для центральных моментов и определяемых ими параметров такие простые соотношения не существуют. Они могут быть получены из уравнения (2.29) с использованием формулы (2.59).

Приведем выражение для стандартного отклонения, представляющего наибольший интерес:

$$\sigma_U = [\sum_i P_i (m_{X_i}^2 + \sigma_i^2) - (\sum_i P_i m_{X_i})^2]^{1/2}. \quad (2.60)$$

Таким образом, стандартное отклонение не является средневзвешенным из стандартных отклонений компонент.

Для стохастического моделирования нагрузок, изменяющихся во времени, имеет место специальный вид смешанного распределения, которое рассмотрим особо.

Многие меняющиеся во времени нагрузки характерны тем, что они действуют непостоянно, а в процессе нагружения появляются паузы, в которых ординаты нагрузок падают до

нуля или лежат ниже некоторого порога, который представляет технический интерес. Если нагрузка с функцией распределения  $F_X(x)$  появляется в произвольный момент времени с вероятностью  $q$  и с вероятностью  $1-q$  возникают паузы, во время которых нагрузка, так сказать, «неактивна», то распределение текущего значения нагрузки в произвольный момент времени можно представить в виде смешанного распределения между непрерывным распределением ординат нагрузок  $F_X$  и дискретной вероятностью  $p=1-q$  в нулевой точке.

Функция распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} qF_X(x); & x < 0 \\ p+qF_X(x); & x > 0 \end{cases}; p+q=1. \quad (2.61)$$

Плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} qf_X(x); & x \neq 0 \\ \infty; & x=0 \end{cases}. \quad (2.62)$$

Вид такой функции представлен на рис. 2.2, в.

Значение квантиля, или обратная функция распределения,

$$x = \begin{cases} F_X^{-1}(F_X/q) & 0 \leq F_X < qF_X(0) \\ 0 & qF_X(0) \leq F_X \leq p+qF_X(0) \\ F_X^{-1}[(F_X-p)/q] & p+qF_X(0) < F_X \leq 1 \end{cases} \quad (2.63)$$

#### Распределения, параметры которых — случайные величины

Рассмотрим случайную величину  $X$ , функция распределения которой  $F_X(x/v)$  зависит от параметра  $v$ .

При практическом применении часто возникает вопрос: как выглядит распределение, если  $v$  не константа, а сама непрерывная случайная величина  $\Theta$  с плотностью распределения  $f_\Theta(v)$ . Помня функцию в этом случае штрихом, получим:

$$\left. \begin{aligned} F'_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x/v) f'_\Theta(v) dv; \\ f'_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x/v) f'_\Theta(v) dv, \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

а для моментов любого порядка, в том числе для среднего

$$m'_X = \int_{-\infty}^{\infty} m_X(v) f'_\Theta(v) dv. \quad (2.65)$$

Стандартное отклонение на основании выражений (2.29) и (2.65) имеет вид:

$$\sigma'_X = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_X^2(v) + m_X^2(v)] f'_\Theta(v) dv - m'^2_X \right]^{1/2}. \quad (2.66)$$

Последнее выражение можно представить в форме

$$\sigma'_X = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_X^2(v) f_\Theta(v) dv + \int_{-\infty}^{\infty} [m_X(v) - m'_X]^2 f_\Theta(v) dv \right]^{1/2}. \quad (2.67)$$

Если  $\Theta$  является дискретной случайной величиной, то наблюдается особый случай смешанного распределения.

#### Трансформированные распределения

По известным типам распределений, путем соответствующих преобразований, можно получить новые распределения. Если  $F_X(x)$  является функцией распределения случайной величины  $X$ , а другая случайная величина  $U$  связана с  $X$  зависимостью  $U=\Psi(X)$ , то функция распределения  $U$  при монотонно возрастающей функции  $\Psi(x)$  имеет вид:

$$F_U(x) = F_X[\Psi^{-1}(x)], \quad (2.68)$$

а при монотонно убывающей

$$F_U(x) = 1 - F_X[\Psi^{-1}(x)]. \quad (2.69)$$

Для плотности распределения в обоих случаях

$$f_U(x) = \left| \frac{d\Psi^{-1}(x)}{dx} \right| f_X[\Psi^{-1}(x)]. \quad (2.70)$$

Многие практически применимые типы распределений могут быть получены из других распределений подходящими преобразованиями. Как пример, упомянем о переходе от нормального распределения к логнормальному с помощью функции  $U=e^x$ . Все типы распределений экстремальных значений переходят друг в друга с помощью преобразований, приведенных в табл. 2.1.

В связи с особым значением приведем соотношения для случая линейного преобразования  $U=bX+x_0$ :

$$\left. \begin{aligned} F_U(x) &= F_X\left(\frac{x-x_0}{b}\right); \\ f_U(x) &= \frac{1}{b} f_X\left(\frac{x-x_0}{b}\right); \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} m_U &= b m_X + x_0; \\ \sigma_U &= b \sigma_X; \\ \gamma_U &= \gamma_X; \\ \varepsilon_U &= \varepsilon_X. \end{aligned}$$

В частном случае  $b=1$  получается простой сдвиг распределения по оси  $x$  на величину  $x_0$ . Это простое преобразование позволяет повысить число свободных параметров, за счет чего распределение будет лучше соответствовать статистическим данным. Поэтому в прил. 11 распределения даны в обобщенной сдвинутой форме.

## 2. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Если для характеристики случайных свойств явления имеют значение многие величины, то оно может быть представлено многомерной случайной величиной, называемой случайным вектором:  $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ . Например, для снеговых нагрузок существенны как толщина снегового покрова, так и плотность снега. Обе величины случайны, но не зависят друг от друга, пока большая толщина снега не приведет за счет уплотнения к большей плотности.

Функция распределения  $m$ -мерной случайной величины имеет вид:

$$F_X(x) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = P[(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \dots \cap (X_m \leq x_m)]. \quad (2.72)$$

Если все переменные непрерывны, то

$$f_X(x) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} F_X(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (2.73)$$

представляет собой  $m$ -мерную плотность распределения случайного вектора  $X$ . Если все плотности распределения известны, то функция распределения получается интегрированием:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f_X(s_1, s_2, \dots, s_m) ds_1, ds_2, \dots, ds_m. \quad (2.74)$$

Функция и плотность распределения отдельной компоненты  $X_1$  получается интегрированием остальных компонент от  $-\infty$  до  $\infty$ :

$$F_{X_1}(x_1) = P(X_1 \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, s_2, \dots, s_m) \times ds_2, ds_3, \dots, ds_m. \quad (2.75)$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{\partial F_{X_1}(x_1)}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, s_2, \dots, s_m) ds_2, \dots, ds_m. \quad (2.76)$$

Эти распределения называются предельными.

Как соотношением (2.4) введена условная вероятность, так можно определить и условную функцию распределения. Например, для двумерного вектора

$$F_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = P(X_1 \leq x_1 | X_2 = x_2) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} f_X(s_1, x_2) ds_1}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, x_2) ds_1}. \quad (2.77)$$

Это есть вероятность того, что величина  $X_1$  меньше или равна  $x_1$  при условии, что случайная величина  $X_2$  примет значение  $x_2$ :

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{\partial F_{X_1|X_2}(x_1|x_2)}{\partial x_1} = \frac{f_X(x_1, x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, x_2) ds_1}. \quad (2.78)$$

Две случайных величины называются независимыми, если

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = f_{X_1}(x_1). \quad (2.79)$$

Из выражения (2.78) в этом случае следует:

$$f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2). \quad (2.80)$$

Соответственно, для  $m$ -мерного случая

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_m}(x_m), \quad (2.81)$$

т. е. плотность распределения случайного вектора с взаимно независимыми компонентами равна произведению плотностей распределения отдельных компонент.

Если  $X_1$  и  $X_2$  две случайные величины, введем смешанный второй центральный момент

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_1, X_2] &= E\{(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - E[X_1])(x_2 - E[X_2]) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Эта величина называется ковариацией  $X_1$  и  $X_2$ . Отношение

$$\rho_{X_1, X_2} = \text{Cov}[X_1, X_2] / (\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}) \quad (2.83)$$

называется коэффициентом корреляции и может принимать значения в интервале  $-1 \leq \rho_{X_1, X_2} \leq +1$ . Коэффициент  $\rho$  представляет собой меру линейной зависимости двух случайных величин. При больших коэффициентах корреляции реализации  $X_1$  и  $X_2$  оказываются примерно одинаковыми со средним значением. При отрицательном  $\rho$  чаще встречаются малые значения  $X_1$  при больших значениях  $X_2$ , и наоборот (рис. 2.6).

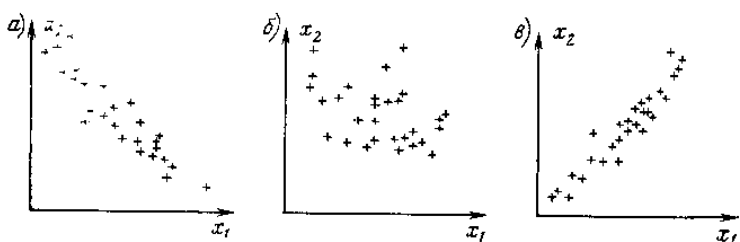


Рис. 2.6. Коэффициенты корреляции  $\rho$  на примере выборки двумерной нормально распределенной случайной величины  
 $a - \rho = -0,95$ ;  $б - \rho = 0$ ;  $в - \rho = 0,95$

Две случайных величины называются некоррелированными, если  $\rho_{X_1, X_2} = 0$ . Две независимых случайных величины всегда являются некоррелированными; некоррелированные случайные величины не всегда независимы.

Если учесть, что

$$\text{Cov} [X_1, X_2] = \text{Var} [X_1], \quad (2.84)$$

то можно охарактеризовать стохастическую зависимость между компонентами  $m$ -мерного случайного вектора с помощью так называемой матрицы ковариаций  $C_X$ :

$$C_X = \begin{pmatrix} \text{Var} [X_1] & \text{Cov} [X_1, X_2] \dots \text{Cov} [X_1, X_m] \\ \text{Cov} [X_2, X_1] & \text{Var} [X_2] & \dots \text{Cov} [X_2, X_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ \text{Cov} [X_m, X_1] & \text{Cov} [X_m, X_2] \dots \text{Var} [X_m] \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Особое значение имеет  $m$ -мерное нормальное распределение, плотность которого в общем случае имеет вид:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |C_X|^{1/2}} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (x_i - m_i) c_{ij}^{(-1)} (x_j - m_j) \right]. \quad (2.86)$$

где  $|C_X|$  — определитель матрицы ковариаций [см. формулу (2.85)];  $c_{ij}^{(-1)}$  — элементы обратной матрицы  $C_X^{-1}$ .

Для нормально распределенных случайных величин линии или плоскости равных плотностей распределения образуют эллипсы или эллипсоиды. Если при этом случайные величины взаимонезависимы, то главные оси эллипсоида оказываются параллельными осям координат.

### 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Весьма упрощенно некоторые нагрузки, изменяющиеся во времени, могут быть представлены последовательностью прямоугольных импульсов с постоянной длительностью  $d$  и случайными величинами ординат. При этом ординаты нагрузки выбираются так, чтобы прямоугольный импульс охватывал фактический ход процесса нагружения. Если интервалы времени  $d$  достаточно длительны, то корреляционная функция процесса нагружения затухает и можно ввести допущение о стохастической независимости последовательности значений нагрузки.

При такой простой модели случайные свойства процесса нагружения могут быть представлены только случайными величинами, а именно ординатами нагрузок с функцией распределения  $F_X$ .

Распределение максимального значения  $F_{\max X}$  нагрузки за достаточно большое время, например за предусматриваемый срок службы сооружения

$$T = nd \quad (2.87)$$

(где  $n$  — целочисленная величина), может быть определено по выражению (2.47).

$$F_{\max X} = [F_X]^n; f_{\max X} = n [F_X]^{n-1} f_X. \quad (2.88)$$

При такой последовательности различных состояний нагрузки представляет интерес вопрос, через какие интервалы времени эта нагрузка может превосходить некоторый заданный уровень  $r$ . Время при этом будем измерять числом  $j$  интервала времени  $d$ . Время  $j$  между двумя пересечениями уровня  $r$  называется периодом возврата или периодом повто-

реимости  $T_R$ . На рис. 2.7 показаны реализации  $t_R$  случайной величины  $T_R$ . Период повторяемости  $T_R$  представляет собой дискретную случайную величину, которая с определенной вероятностью может принимать значения  $j=1, 2, 3, \dots$ . Вероятность того, что  $T_R=j$ , равна вероятности того, что в последовательности  $x$  первые  $j-1$  величины подряд меньше  $r$ , а затем появляется величина, большая  $r$ . Поскольку после-

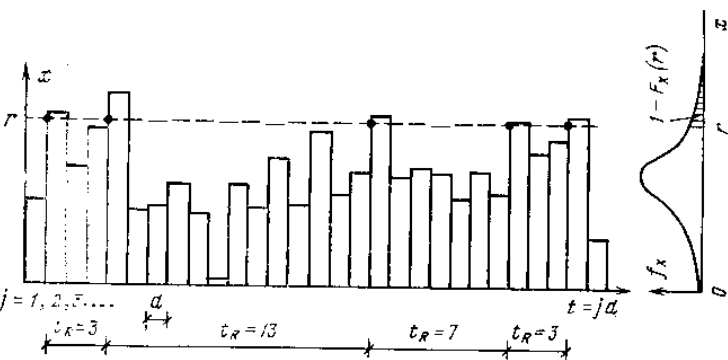


Рис. 2.7. К понятию периода повторяемости на примере реализации случайной последовательности независимых нагрузений для уровня  $r$

довательность значений независима, вероятность может быть найдена по закону умножения вероятностей [см. формулу (2.10)]:

$$P(T_R = j) = [P(X \leq r)]^{j-1} P(X > r) = [F_X(r)]^{j-1} [1 - F_X(r)]. \quad (2.89)$$

Это и есть плотность распределения периода повторяемости  $f_{T_R}$  для уровня  $r$ . Легко убедиться, что эта плотность монотонно убывает с увеличением  $j$ .

Функция распределения  $F_{T_R}(j)$  получается суммированием плотности от  $i=1$  до  $i=j$ :

$$\begin{aligned} P(T_R \leq j) = F_{T_R}(j) &= \sum_{i=1}^j P(T_R = i) = \\ &= [1 - F_X(r)] \sum_{i=1}^j [F_X(r)]^{i-1} = \\ &= [1 - F_X(r)] \frac{1 - [F_X(r)]^j}{1 - F_X(r)} = 1 - [F_X(r)]^j. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Обозначая для краткости  $F_X(r)$  через  $F$  по первой из формул (2.27), найдем среднее значение периода повторяемости

$$\begin{aligned} m_{T_R} &= \sum_{j=1}^{\infty} j P(T_R = j) = (1-F) \sum_{j=1}^{\infty} j F^{j-1} = \\ &= (1-F) (1 + 2F + 3F^2 + \dots + jF^{j-1} + \dots) = \\ &= (1-F) \frac{\partial}{\partial F} (1 + F + F^2 + \dots) = (1-F) \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial F} \left( \frac{1}{1-F} \right) = \frac{1}{1-F} \end{aligned} \quad (2.91)$$

или обратное соотношение

$$F_X(r) = 1 - 1/m_{T_R}. \quad (2.92)$$

Среднее значение периода повторяемости и функцию распределения величин ординат нагрузки всегда легко выразить одно через другое.

В инженерной практике понятие «средний период повторяемости» уже давно укоренилось. Говорят о столетнем событии, столетнем землетрясении и т. д. Однако это понятие часто интерпретируют не с вероятностной, а с детерминистской точки зрения. Невероятно полагать, что столетнее событие действительно наступает каждые 100 лет. Оно происходит каждые 100 лет в среднем.

Вероятность того, что событие со средним периодом повторяемости  $m_{T_R}$  лет произойдет в интервале времени от 1 года до  $j$  лет, составляет в соответствии с формулами (2.90) и (2.92)

$$F_{T_R}(j) = 1 - F_X^j = 1 - (1 - 1/m_{T_R})^j. \quad (2.93)$$

Некоторое столетнее событие может появиться за период от 1 до 100 лет с вероятностью  $1 - (1 - 1/100)^{100} = 0,634$ , а за период более 100 лет с вероятностью 0,366.

Следует иметь в виду, что вероятность пересечения уровня  $r$  в каждом интервале времени одинакова и равна:

$$P(X > x) = 1 - F_X(r) = 1/m_{T_R}$$

и не зависит от того, состоялось пересечение уровня в предыдущем интервале времени или нет.

*Пример 2.1.* Многолетние метеорологические исследования показали, что ежегодные максимальные снеговые нагрузки на поверхности земли для средних и восточных внутренних районов бывшей ГДР достаточно точно соответствуют распределению экстремальных значений типа I со средним  $m = 0,3 \text{ кН/м}^2$  и стандартным  $\sigma = 0,29 \text{ кН/м}^2$  отклонением [6.48].

1. Как велика вероятность того, что эта снеговая нагрузка превзойдет нормативное значение по TGL 32274/05, равнос 0,5 кН/м<sup>2</sup> для этих районов, в течение одной зимы?

Для ответа следует сначала определить оба параметра  $a$  и  $u$  распределения по значениям  $m$  и  $\sigma$ . По табл. 6 прил. II для распределения типа I

$$a = 1,28255/\sigma = 4,423;$$

$$u = m - 0,57722/a = 0,3 - 0,57722/4,423 = 0,1695.$$

Тогда функция распределения для  $x = 0,5$  кН/м<sup>2</sup>

$$F(x) = \exp\{-\exp[-a(x-u)]\};$$

$$F(0,5) = \exp\{-\exp[-4,423(0,5-0,1695)]\} = 0,793.$$

Вероятность того, что нормативное значение нагрузки будет превышено в течение одной зимы, составляет:

$$1 - F(0,5) = 1 - 0,793 = 0,207.$$

Этот расчет относится к нагрузке на поверхности земли и не учитывает ветрового сноса снега с кровли.

2. Каково среднее значение периода повторяемости нормативной нагрузки?

По формуле (291) получаем:

$$m_{T_R} = \frac{1}{1 - F(0,5)} = \frac{1}{1 - 0,793} = 4,83 \text{ года.}$$

Итак, в среднем, каждые 4,83 года снеговая нагрузка достигает или превосходит нормативное значение.

3. Какова вероятность того, что наибольшая снеговая нагрузка за период 20 лет превзойдет расчетное значение, равное для плоской кровли  $s_0 n k_s = 0,5 \cdot 1,4 \cdot 1,5 = 1,05$  кН/м<sup>2</sup> (где  $k = 1,5$  — коэффициент для нагрузки на кровле). Найдем сначала распределение экстремальных значений для периода 20 лет. По формуле (288)

$$F_{\text{max}}(x) = [F(x)]^n = \exp\{-n \exp[-a(x-u)]\} = \exp\{-\exp[-a(x-u) + \ln n]\};$$

$$F_{\text{max}}(1,05) = \exp\{-\exp[-4,423(1,05-0,1695) + \ln 20]\} = 0,666.$$

Расчетная нагрузка может быть превышена в течение 20 лет с вероятностью  $P = 1 - 0,666 = 0,334$ .

4. Какова снеговая нагрузка, соответствующая периоду повторяемости в 50 лет?

Из формулы (292) получаем соответствующую  $m_{T_R} = 50$  функцию распределения

$$F(r) = 1 - 1/50 = 0,98.$$

Разрешая уравнение  $F(r) = \exp\{-\exp[-a(r-u)]\}$  относительно  $r$ , получим:

$$r = u - \frac{1}{a} \ln(-\ln F) = 0,1695 - \frac{1}{4,423} \ln(-\ln 0,98) =$$

$$= 1,05 \text{ кН/м}^2.$$

## 2.4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

### 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Стохастический процесс (называемый также случайной функцией или случайным процессом)  $X(t)$  представляет собой функцию, значение которой для каждого аргумента  $t$  является случайным числом. Он может рассматриваться как множество случайных величин  $\{X(t), t \in T\}$ .

Аргумент  $t$  предполагается не стохастическим. Если  $t$  обозначает время, то говорят о случайных процессах, а если, кроме того,  $X$  является вектором, зависящим от пространственных координат, то говорят о случайных полях. В данной книге под  $t$  будем всегда понимать время.

Примерами случайных функций могут служить действующие на сооружение нагрузки, случайно меняющиеся во времени.

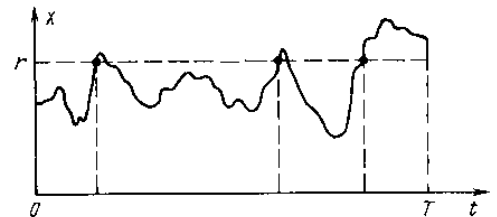


Рис. 2.8. Реализация непрерывного случайного процесса с двумя положительными и двумя отрицательными пересечениями уровня  $r$

Как результат эксперимента или наблюдения получаем одну реализацию случайной функции. Эта реализация представляет собой обычную функцию. Новые эксперименты или наблюдения дают другие реализации, т. е. другие функции. Однако вероятностные характеристики различных реализаций одной и той же случайной функции одинаковы. На рис. 2.8—2.13 показаны примеры реализаций разных типов случайных функций, которые применимы при описании нагрузок.

### 2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайные функции могут быть описаны подобно случайным векторам.

В каждый данный момент времени  $t$  случайная функция полностью определяется ее функцией распределения  $F_X(x, t) = P\{X \leq x\}$ .

Для двух моментов времени  $t_1, t_2$  и  $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2)$  процесс описывается двумерной функцией распределения, отнесенной к этим двум моментам времени:  $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P \times [(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2)]$ . Если моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  достаточно близки друг к другу, между  $X_1$  и  $X_2$  имеется определенная корреляция. Очевидно, случайную функцию можно рассматривать как заданную, если для любого значения  $t_1, t_2, \dots, t_n$  известна многомерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n)]. \quad (2.94)$$

Если существует соответствующая производная, то

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (2.95)$$

представляет  $n$ -мерную плотность распределения процесса  $X(t)$ .

Исчерпывающая характеристика случайных функций с помощью совокупности функций или плотностей распределения требует больших затрат. Поэтому на практике ограничиваются чаще всего использованием основных численных параметров, вместо того чтобы отыскивать многомерные законы распределения.

Случайный процесс называется стационарным, если плотность и функция распределения не зависят от начала отсчета времени, т. е.

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0). \quad (2.96)$$

Одномерная плотность распределения ординат стационарного случайного процесса не зависит от времени:

$$f_X(x_1, t_1) = f_X(x_1). \quad (2.97)$$

### 3. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Как и для случайных величин, можно определить моменты случайной функции, которые в этом случае являются функциями  $t$ . Особое значение имеют функция математического ожидания или среднего

$$E[X(t)] = m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x; t) dx \quad (2.98)$$

и функция вариации

$$\text{Var}[X(t)] = \sigma_X^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_X(t)]^2 f_X(x; t) dx. \quad (2.99)$$

Поскольку эти выражения зависят от  $t$ , но не зависят от  $X$ , они являются не стохастическими, а обычными функциями.

Для двух моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  функция ковариации как второй центральный момент определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{X,X}(t_1, t_2) &= \text{Cov}[X(t_1), X(t_2)] = \\ &= E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_X(t_1)][x_2 - m_X(t_2)] f_X \times \\ &\quad \times (x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1, dx_2. \end{aligned} \quad (2.100)$$

По аналогии с формулой (2.83) нормированная с помощью стандартного отклонения функция ковариации называется корреляционной функцией:

$$\rho_{X,X}(t_1, t_2) = \frac{R_{X,X}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1) \sigma_X(t_2)}. \quad (2.101)$$

Последние две функции являются симметричными функциями их аргументов:

$$\left. \begin{aligned} R_{X,X}(t_1, t_2) &= R_{X,X}(t_2, t_1); \\ \rho_{X,X}(t_1, t_2) &= \rho_{X,X}(t_2, t_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

Функции среднего и вариации при стационарной случайной функции становятся постоянными величинами, а функции ковариации и корреляции зависят только от интервала времени  $\tau = t_2 - t_1$ . Функции  $R_{X,X}$  и  $\rho_{X,X}$  являются четными:

$$\left. \begin{aligned} R_{X,X}(\tau) &= R_{X,X}(-\tau); \\ \rho_{X,X}(\tau) &= \rho_{X,X}(-\tau). \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

а ординаты функции ковариации не превосходят величины вариации:

$$R_{X,X}(\tau) \leq R_{X,X}(0) = \text{Var}[X] = \sigma_X^2; \quad (2.104)$$

$$\rho_{X,X}(\tau) \leq \rho_{X,X}(0) = 1. \quad (2.105)$$

Очень часто на практике имеется всего одна единственная реализация процесса. В таком случае напрашивается опреде-



ление среднего путем осреднения по времени, вместо того чтобы проводить осреднение по многим реализациям:

$$m_X = \frac{1}{T} \int_0^T X(\tau) d\tau. \quad (2.106)$$

Если это приближение стремится к точному среднему значению при  $T \rightarrow \infty$ , то такой процесс называют «эргодическим в среднем». Процесс «эргодичен по корреляции», если

$$E[X(t), X(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) X(t+\tau) dt. \quad (2.107)$$

Процесс называется эргодическим, если это свойство имеет место для всех моментов. Эргодические процессы всегда стационарны, но стационарные не всегда эргодичны.

#### 4. ВЫБРОС ПРОЦЕССА ЗА ЗАДАННЫЙ УРОВЕНЬ

Для оценки вероятности отказа играет большую роль вопрос о том, достигает ли случайный процесс некоторого определенного уровня или превосходит его, и если да, то как часто. На рис. 2.8 показан пример реализации процесса  $X(t)$ , который за время  $0 \leq t \leq T$  трижды пересекает уровень  $r$  снизу вверх (положительное пересечение уровня) и дважды — сверху вниз (отрицательное пересечение уровня).

Коэффициент выброса  $v^+(r)$  процесса  $X(t)$  определяется как среднее число положительных пересечений уровня  $r$  процессом  $X(t)$  за единицу времени. При непрерывных дифференцируемых процессах положительное пересечение уровня имеет место, если в момент  $t$

$$X(t) < r; \dot{X}(t) > 0.$$

Среднее число пересечений уровня за единицу времени вычисляется путем предельного перехода:

$$v^+(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[X(t) < r \cap X(t+\Delta t) > r]. \quad (2.108)$$

Для дифференцируемых процессов

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \dot{X}(t) \Delta t, \quad (2.109)$$

$$\dot{X}(t) = dX(t)/dt.$$

Тогда вместо выражения (2.108) можно записать:

$$v^+(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[r - \dot{X}(t) \Delta t < X(t) < r, 0 < \dot{X}(t) < \infty]. \quad (2.110)$$

Для вычисления вероятности в это выражение вводится двумерная плотность распределения  $f_{X, \dot{X}}$  случайного процесса и его производной по времени в момент  $t$ . Если  $v^+(r)$  не зависит от времени, то из зависимости (2.110) следует:

$$v^+(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{r - \dot{X} \Delta t}^r \int_0^\infty f_{X, \dot{X}}(x_1, x_2) dx_2 dx_1.$$

Интегрируя по  $x_1$  и делая предельный переход с учетом закона о среднем из теории дифференциального исчисления, получим классическую формулу Райса:

$$v^+(r) = \int_0^\infty x_2 f_{X, \dot{X}}(r, x_2) dx_2. \quad (2.111)$$

Среднее число положительных пересечений уровня за заданный промежуток времени  $T$  получается интегрированием

$$E[N^+] = \int_0^T v^+(r, t) dt$$

в общем случае, а для стационарного случая с постоянным во времени значением  $v^+$

$$E[N^+] = v^+(r) T. \quad (2.112)$$

Для оценки надежности сооружений представляют интерес особенно высокие уровни  $r$ , редко пересекать процессом  $X(t)$ . Для таких случаев получается простая приближенная зависимость между коэффициентом выброса и распределением экстремальных значений за период времени  $T$ .

При высоком  $r$  пересечение уровня является «редким событием». В теории вероятностей показывается, что число наступлений редких случайных событий в заданном интервале времени подчиняется закону распределения Пуассона [2.1, 2.3]. В соответствии с этим, вероятность того, что произойдет именно  $m$  редких событий, составляет

$$P[N^+(r) = m] = \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda),$$

а среднее число событий  $E[N^+(r)] = \lambda$ .

Тогда из выражения (2.112) следует, что  $\lambda = v^+(r) T$  и

$$P[N^+(r) = m] = \frac{[v^+(r) T]^m}{m!} \exp(-v^+(r) T). \quad (2.113)$$

Функция  $F_{\max X(r)}$  распределения экстремальных наибольших значений процесса  $X(t)$  равна вероятности того, что экстремальное значение за рассматриваемый отрезок времени меньше  $r$ , т. е. число  $N^+(r)$  равно нулю

$$F_{\max X}(r) = P[\max X(t) < r] = P[N^+(r) = 0].$$

При  $m=0$  из формулы (2.113) следует:

$$F_{\max X}(r) \approx \exp[-v^+(r)T] \approx 1 - v^+(r)T; \quad (2.114)$$

$$v^+(r) \approx -\frac{1}{T} \ln F_{\max X}(r) \approx \frac{1}{T} (1 - F_{\max X}(r)). \quad (2.115)$$

Эти простые приближенные соотношения между коэффициентом выброса и распределением экстремальных значений часто оказываются весьма полезными. При этом надо помнить, что они справедливы для высоких уровней. Для средних уровней распределение Пуассона (2.113) уже не имеет места.

### 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Реализации дифференцируемых стохастических процессов в любой момент времени имеют некоторое значение функции и производную по времени (см. рис. 2.8).

Для определения коэффициента выброса  $v^+(r)$  по формуле Райса (2.111) необходима производная  $\dot{X}(t)$ . Приведем некоторые соотношения для параметров  $\dot{X}(t)$ .

Законы распределения ординат производной стохастического процесса легко определить только в редких случаях, но о некоторых параметрах можно высказать простые общие соображения:

$$m_{\dot{X}}(t) = dm_X(t)/dt, \quad (2.116)$$

т. е. математическое ожидание производной стохастического процесса равно производной от математического ожидания процесса. При стационарных процессах  $m_{\dot{X}}=0$ .

Для функции ковариации в общем случае имеем:

$$R_{\dot{X}, \dot{X}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_{X, X}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad (2.117)$$

а в случае стационарного процесса

$$R_{\dot{X}, \dot{X}}(\tau) = -\frac{d^2 R_{X, X}(\tau)}{d\tau^2}; \quad (2.118)$$

$$\sigma_{\dot{X}} = \sqrt{R_{\dot{X}, \dot{X}}(0)} = \sqrt{-\frac{d^2 R_{X, X}(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0}} \quad (2.119)$$

Следовательно, производная стационарного стохастического процесса также стационарна.

Для дифференцируемых стационарных процессов ординаты стохастического процесса  $X(t)$  и производной  $\dot{X}(t)$

в одинаковые моменты времени являются некоррелированными случайными величинами, т. е.

$$R_{X, \dot{X}}(0) = 0. \quad (2.120)$$

Особое значение на практике имеют нормальные стохастические процессы, называемые также гауссовыми. Они имеют то положительное свойство, что линейная комбинация многих гауссовых процессов вновь дает гауссов процесс.

Аналогично формуле (2.86) плотность распределения для моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$\begin{aligned} f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n [x_i - m_X(t_i)] \times \right. \\ &\quad \left. \times c_{ij}^{-1} [x_j - m_X(t_j)] \right\} \end{aligned} \quad (2.121)$$

с матрицей автоковариации

$$C = \begin{pmatrix} R_{X, X}(t_1, t_1) & R_{X, X}(t_1, t_2) & \dots & R_{X, X}(t_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{X, X}(t_n, t_1) & R_{X, X}(t_n, t_2) & \dots & R_{X, X}(t_n, t_n) \end{pmatrix}.$$

Гауссов процесс полностью определяется функцией ковариации  $R_{X, X}(t_1, t_2)$  и функцией среднего.

Производная гауссова процесса также представляет гауссов процесс. Для стационарных гауссовых процессов  $X(t)$  и  $\dot{X}(t)$  не только некоррелированы, но и независимы, т. е.

$$f_{X, \dot{X}}(x, \dot{x}) = f_X(x) f_{\dot{X}}(\dot{x}), \quad (2.122)$$

причем

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - m_X}{\sigma_X} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_X} \varphi \left( \frac{x - m_X}{\sigma_X} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\dot{X}}(\dot{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{X}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{X}}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma_{\dot{X}}} \varphi \left( \frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{X}}} \right), \end{aligned} \quad (2.123)$$

где  $\sigma_x^2$  определяется выражением (2.119). Подробные сведения можно найти в работах [2.6, 2.4 и 2.12].

Подставив последние выражения в формулу (2.111), после несложных преобразований получим коэффициент выбросов для гауссова процесса:

$$v^+(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{r - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right]$$

или с помощью функции плотности  $\varphi$  из зависимости (2.36)

$$v^+(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x} \varphi \left( \frac{r - m_x}{\sigma_x} \right). \quad (2.124)$$

Если рассматривать средний уровень  $r = m_x$ , то среднее число пересечений уровня среднего  $m_x$  в единицу времени

$$v^+(m_x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x}.$$

Эта величина имеет характер «средней частоты» стохастического процесса. Обозначая ее через  $f_m$ , запишем выражение (2.124) в форме

$$v^+(r) = f_m \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{r - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right],$$

или

$$v^+(r) = \sqrt{2\pi} f_m \varphi \left( \frac{r - m_x}{\sigma_x} \right). \quad (2.125)$$

## 6. ПРОЦЕССЫ ОБНОВЛЕНИЯ

Некоторые нагрузки в макропериоды времени оказываются не непрерывными, а появляются в дискретные моменты времени более или менее внезапно.

Такие моменты времени, в которые появляются «новые» нагрузки могут быть смоделированы с помощью процессов обновления, называемых также точечными или целочисленными процессами. На рис. 2.9 показана возможная реализация такого процесса обновления. Нагрузки прикладываются в дискретные моменты времени  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , причем интервалы между двумя точками обновления  $D_n = t_{n+1} - t_n$  являются положительными, независимыми и распределенными по одинаковому закону случайными числами.

Для последовательности моментов обновления имеют место соотношения

$$t_0 = 0; t_1 = D_0; t_2 = D_0 + D_1; \dots; t_n = D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1}.$$

Процесс обновления описывается числом  $N$  обновлений нагрузки, появившихся до момента  $t$ :

$$N(t) = \max \{n, t_n \leq t\}, \quad (2.126)$$

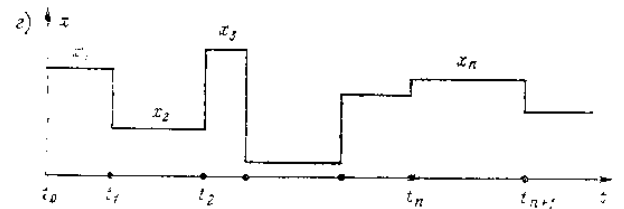
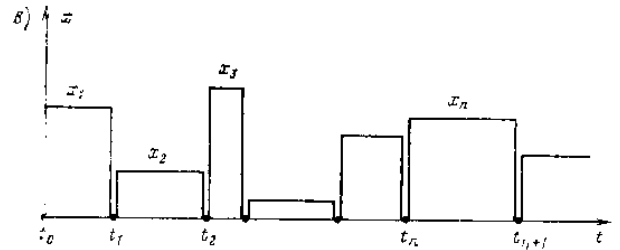
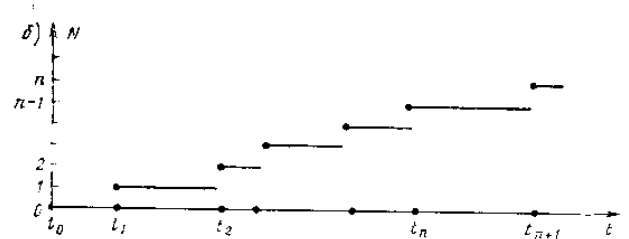


Рис. 2.9. Процесс обновления и двухпараметрический импульсный процесс с прямоугольными импульсами

а — моменты обновления  $t_i$ ; б — реализация процесса обновления  $N(t)$ ; в — реализация импульсного процесса с возвратом к уровню нуля; г — то же, без возврата к нулевому уровню

где  $N(t)$  — дискретный случайный процесс, который имеет только целые положительные значения.

Наиболее простым процессом обновления, почти всегда применяющимся для описания нагрузок, является пуассонов процесс, в котором число  $N(t)$  моментов обновления  $t_n$  вплоть до времени  $t$  распределено по закону Пуассона

$$P[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t), \quad (2.127)$$

а интервалы времени  $D_n$  между двумя обновлениями распределяются по экспоненциальному закону

$$F_D(t) = P(D \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t). \quad (2.128)$$

Параметр  $\lambda$  — число обновлений за единицу времени — называется также коэффициентом или интенсивностью процесса обновления.

Более полные сведения содержатся в литературе [2.1, 2.5].

## 7. ИМПУЛЬСНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### Двухпараметрические процессы

Многие нагрузки меняют свою величину лишь в дискретные моменты времени и остаются более или менее постоянными между этими моментами. Это — нагрузки от оборудования, мебели, складываемых товаров.

Весьма правдоподобно такие нагрузки моделируются математически, если интервалам  $D_n$  процесса обновления  $N(t)$  сопоставить случайные, остающиеся постоянными в интервале  $D_n$  интенсивности нагрузки  $X_n$ ;  $n=1, 2, \dots$  — независимые случайные числа с одинаковым законом распределения. На рис. 2, 9, а и б показаны реализации таких импульсных процессов.

Эти процессы называются двухпараметрическими, прямоугольными волновыми, или пуассоновыми. Двухпараметрическими они называются потому, что их случайные свойства характеризуются двумя случайными величинами — величиной нагрузки  $X_n$  и моментами приложения  $t_n$ , в отличие от случайных последовательностей приложения нагрузки через равные интервалы времени. Различают два типа таких процессов: процессы, которые к каждому моменту обновления всегда возвращаются к нулевому уровню (см. рис. 2.9, а), и процессы, в которых этого не происходит (см. рис. 2.9, б). Нагрузки от мебели в жилых домах относятся к первому типу, а нагрузки в складских помещениях — ко второму.

Многие нагрузки не действуют постоянно. Возникают паузы, в которые нагрузка равна нулю или пренебрежимо мала. Эти паузы имеют значение в проблеме сочетания нагрузок. Их легко учесть в модели нагрузок, используя импульсные процессы, причем распределение вероятностей величины нагрузки представляется смешанным распределением с дискретной вероятностью в нулевых точках по выражениям (2.61) — (2.63). С вероятностью  $p$  нагрузка в интервале  $D_n$  равна нулю, а с вероятностью  $q=1-p$  — случайной величиной  $X_n = \hat{X}_n$ . На рис. 2.10 показан возможный вид этого процесса.

Такие процессы имеют «фиктивные» точки обновления, в которых нагрузка отсутствует (или действует нулевая нагрузка).

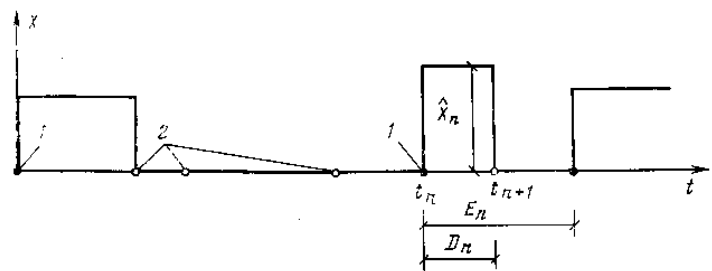


Рис. 2.10. Реализация импульсного процесса в паузах

$t$  — действительные моменты обновления; 2 — фиктивные моменты обновления;  $D_n, E_n$  — случайные величины с экспоненциальным распределением

Если обозначить через  $m_E$  среднее интервалов времени между действительными точками обновления, а через  $m_D$  среднее распределенных по экспоненциальному закону длительностей действия нагрузки, то интенсивность общего процесса

$$\lambda = 1/m_D, \quad (2.129)$$

а вероятность того, что процесс активен

$$q = m_D / m_E. \quad (2.130)$$

Дальнейшее обобщение процесса возможно за счет отказа от прямоугольной формы импульса. В принципе может быть выбрана любая детерминированная форма, которая наиболее соответствует данным наблюдений. В работах [2.13, 2.14] исследовались треугольники и параболы различного вида и

формы в виде домика. Такой процесс можно математически описать в виде

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} \hat{X}_n w(t_1, t_n), \quad (2.131)$$

где  $N(t)$  — процесс обновления;  $(\hat{X}_n)$  — последовательность пиковых значений, последовательность независимых, распределенных по одинаковому закону случайных чисел;  $w$  — функция, определяющая форму импульса.

Для прямоугольного стационарного процесса по рис. 2.9, в, вводя обозначение  $c = (t - t_n) / (t_{n+1} - t_n)$ , получим:

$$w = \begin{cases} 1; & 0 < c < 1 \\ 0; & \text{в прочих случаях.} \end{cases} \quad (2.132)$$

Для формы импульса в виде равнобедренного треугольника (рис. 2.11, б)

$$w = \begin{cases} 2c; & 0 < c < 1/2 \\ 2(1-c); & 1/2 \leq c < 1. \end{cases} \quad (2.133)$$

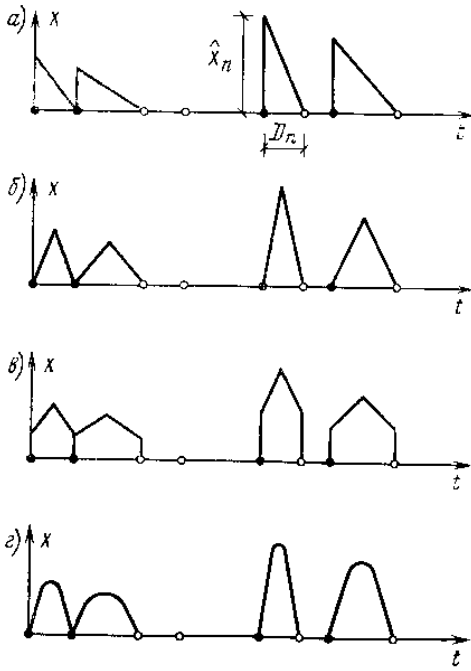


Рис. 2.11. Импульсные процессы с различными детерминированными формами импульсов

Для обсуждаемых далее проблем сочетания нагрузок, определяемых различными процессами, имеют особое значение два вида плотности распределения: плотность распределения пиковых значений действительных импульсов  $f_{\hat{X}}$  и плотность распределения моментальных значений  $f_X$  в произвольный момент времени  $t$ . На рис. 2.12 оба типа представлены для случая треугольного импульса.

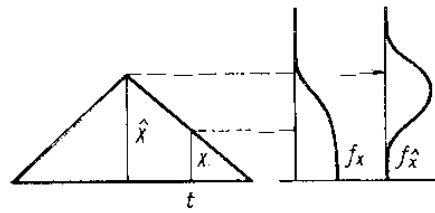


Рис. 2.12. Плотности распределения пиковых  $X$  и текущих  $X$  значений при треугольной форме импульса

Для процесса с прямоугольными импульсами эти распределения, естественно, совпадают:  $f_X = f_{\hat{X}}$ . Для других форм импульсов  $f_X$  может быть получена из  $f_{\hat{X}}$ . Для процесса с прямоугольными импульсами и паузами имеем:

$$f_X(x) = p\delta(x) + qf_{\hat{X}}(x) = \begin{cases} qf_{\hat{X}}(x); & x \neq 0 \\ \infty; & x = 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} p + qF_{\hat{X}}(x); & x \geq 0 \\ qF_{\hat{X}}(x); & x < 0 \end{cases} \quad p + q = 1, \quad (2.134)$$

где  $\delta(x)$  — функция Дирака.

Для треугольных получается

$$f_X(x) = \begin{cases} p\delta(x) + q \int_{s=x}^{\infty} \frac{1}{s} f_{\hat{X}}(s) ds; & x \geq 0 \\ -q \int_{s=-\infty}^x \frac{1}{s} f_{\hat{X}}(s) ds; & x < 0. \end{cases} \quad (2.135)$$

Данные для других форм импульсов можно найти в работе Мадсена [2.13].

Найдем коэффициент выброса за постоянный уровень  $r$  для двухпараметрического импульсного процесса, используя выражение (2.108). Для процесса с прямоугольной формой

импульса и паузами вероятность того, что в момент времени  $t$  процесс  $X(t) \leq r$ , составляет:

$$P(X(t) \leq r) = \begin{cases} p + qF_X^+(r); & r \geq 0 \\ qF_X^+(r); & r < 0 \end{cases}$$

До момента  $t + \Delta t$  положительное пересечение уровня может появиться только в том случае, если, во-первых, в интервале  $\Delta t$  с вероятностью  $\lambda \Delta t$  происходит обновление нагрузки и, во-вторых, если новый уровень нагрузки выше, чем  $r$  (см. рис. 2.13, а). Если момент обновления нагрузки и

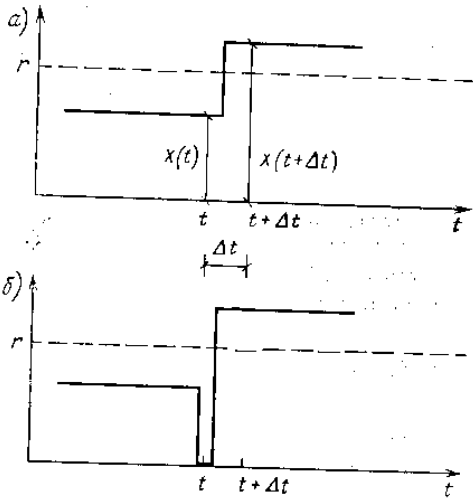


Рис. 2.13. К определению коэффициента выброса для прямоугольного импульсного процесса

се величина стохастически независимы, вероятность, что в момент  $t + \delta t$  нагрузка больше, чем  $r$ , составляет:

$$P[X(t + \delta t) > r] = \begin{cases} \lambda q G_X^+(r) [p + q F_X^+(r)]; & r \geq 0 \\ \lambda q F_X^+(r) [p + q G_X^+(r)]; & r < 0 \end{cases}$$

Подставляя оба последних соотношения в формулу (2.108), получим:

$$v^+(r) = \begin{cases} \lambda q G_X^+(r) [p + q F_X^+(r)]; & r \geq 0 \\ \lambda q F_X^+(r) [p + q G_X^+(r)]; & r < 0 \end{cases} \quad (2.136)$$

Причем  $G_X^+ = 1 - F_X^+$ .

Это соотношение справедливо для прямоугольного импульса со скачками (см. рис. 2.13, а).

Если же перед каждым обновлением процесс сначала возвращается на уровень нуля (см. рис. 2.13, б), то получаем:

$$P[X(t) \leq r] = \begin{cases} 1; & r \geq 0 \\ q F_X^+(r); & r < 0 \end{cases}$$

$$P[X(t + \Delta t) > r] = \begin{cases} \lambda \Delta t [1 - p - q F_X^+(r)]; & r \geq 0 \\ \lambda \Delta t; & r < 0 \end{cases}$$

$$v^+(r) = \begin{cases} \lambda q G_X^+(r); & r \geq 0 \\ \lambda q F_X^+(r); & r < 0 \end{cases} \quad (2.137)$$

Эти соотношения справедливы и для процессов с другой формой импульсов (треугольник, парабола, форма в виде домика), если все обновления нагрузки обязательно начинаются с нулевого уровня.

### Трехпараметрические процессы

Дальнейшее обобщение возможно, если в качестве третьей случайной величины для характеристики процесса вводится длительность действия нагрузки  $D_n$ .

Таким образом появляется трехпараметрический стохастический процесс со случайными моментами приложения нагрузки, случайной интенсивностью ее  $\bar{X}$  и случайной длительностью импульса  $D_n$ . Моменты обновления вновь подчиняются закону Пуассона с параметром  $\lambda$ , так что интервалы между моментами приложения нагрузки являются экспоненциально распределенными с параметром распределения  $\nu$ . Подобные процессы называются отфильтрованными пуассоновыми процессами, причем  $\lambda = 1/m_n$  и  $\nu = 1/m_n$ .

Если длительность нагрузки  $D_n$  стремится к нулю, то возникает так называемый спайк-процесс (от английского spike — острое, пик), пригодный для моделирования внезапно появляющихся краткосрочных событий (см. рис. 2.14, б).

Математическое представление этого процесса имеет вид:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} X_n w(t - t_n, D_n), \quad (2.138)$$

где  $N(t)$  — процесс обновления;  $\{X_n\}$  — последовательность пиковых значений;  $\{D_n\}$  — последовательность длительностей приложения нагрузки;  $w$  — функция для назначения формы импульса.

Обозначая

$$c = (t - t_n) / d_n, \quad (2.139)$$

получаем для стационарного процесса с прямоугольными импульсами (см. рис. 2.14, а и в)

$$w = \begin{cases} 1; & 0 < c < 1 \\ 0; & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.140)$$

а для спайк-процесса (см. рис. 2.14, б)

$$w = \begin{cases} 1; & c = 0 \\ 0; & c \neq 0 \end{cases} \quad (2.141)$$

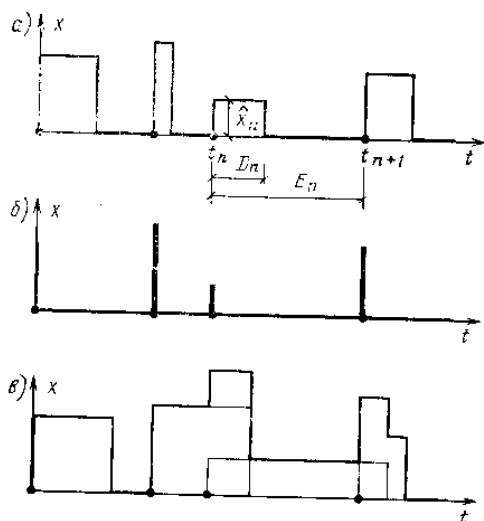


Рис. 2.14 Реализации трехпараметрических импульсных процессов  
а — процесс с  $m_D \ll m_E$ ; б — спайк-процесс; в — процесс с перекрытием  $m_D \approx m_E$ .

Если в трехпараметрическом процессе средняя длительность приложения нагрузки  $m_D$  существенно меньше, чем время между двумя последовательными обновлениями

$$m_D \ll m_E, \quad \nu \gg \lambda, \quad (2.142)$$

то по аналогии с формулой (2.137) получим:

$$\nu^+(r) = \begin{cases} \lambda G_X^*(r); & r \geq 0 \\ \lambda F_X^*(r); & r < 0 \end{cases} \quad (2.143)$$

Поскольку в этом случае паузы между импульсами нагрузки представляются не фиктивными нагрузками с нулевой интенсивностью, имеем всегда  $q=1$  и  $p=0$ . Коэффициент обновления  $\lambda$  — реальной нагрузки не идентичен  $\lambda$  двухпараметрического процесса.

Если соотношение (2.142) не выполняется, и порядок среднего  $m_D$  длительности импульса соответствует порядку интервала  $m_E$ , то с большой вероятностью могут возникать пересечения импульсов (см. рис. 2.14, в). В этом случае определение выброса за уровень существенно осложняется. Чита-

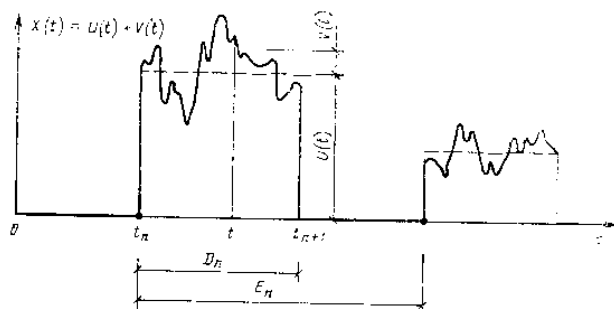


Рис. 2.15. Реализация прерывного непрерывного процесса

тель отсылается по этому вопросу к работам Брайтинга и Раквица [2.15, 2.16].

### Прерывные непрерывные процессы

Рассмотренные выше процессы имели детерминированную форму импульса. Если в решении какой-либо проблемы помимо изменений нагрузки в макроинтервалах времени важен учет изменений нагрузки в микроинтервалах, можно ввести обобщенную модель нагрузки, наложив на отдельные импульсы трехпараметрического процесса непрерывный процесс. Следовательно, становится стохастической и сама форма импульсов. Такие процессы названы Уэном и Пилсом [2.17] прерывными непрерывными процессами. Наложенный процесс изменений в микровремени характеризуется обычным образом с помощью среднего корреляционной функции или спектральной плотности. Однако эти характеристики делаются зависимыми от случайных величин, характеризующих импульсный процесс в макровремени.

Рассмотрим комбинацию трехпараметрического пуассоновского импульсного процесса  $U(t)$  с прямоугольными импульсами  $\lambda \ll \nu$  и стационарного гауссова процесса  $V(t)$  и найдем приближенное выражение для коэффициента выброса  $\nu^+(t)$ :

$$X(t) = U(t) + V(t).$$

Распределение экстремальных значений длительности одного импульса составляет по выражениям (2.114) и (2.124) приближенно:

$$F_{D \max V}(r) \approx \exp(-v_V^+(r) m_D) = \exp\left\{-\frac{\sigma_V}{2\pi\sigma_V} \times \right. \\ \left. \times m_D \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r-m_V}{\sigma_V}\right)^2\right]\right\}.$$

Параметры гауссова процесса  $m_V$ ,  $\sigma_V$ ,  $\sigma_V$  являются функциями случайной величины  $U$  с плотностью  $f_U(u)$ , а поэтому с учетом формулы (2.64) получаем:

$$F_{D \max V}(r) = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{\sigma_V}{2\pi\sigma_V} m_D \exp\left[-\frac{1}{2}\right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{r-m_V}{\sigma_V}\right)^2\right]\right\} f_U(u) du.$$

Для длительного периода времени с многими такими импульсами с коэффициентом обновления  $\lambda$  в соответствии с уравнением (2.143) коэффициент выброса (для  $r \geq 0$ )

$$v^+(r) = \lambda [1 - F_{D \max V}(r)] = \lambda \left\{ 1 - \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\sigma_V}{2\pi\sigma_V} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times m_D \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(r-m_V)^2}{\sigma_V^2}\right)\right] f_U(u) du \right\}. \quad (2.144)$$

Прерывные континуальные процессы очень подходят для моделирования землетрясений или воздействия ветра. Например, при воздействии ветра величина  $U = m_V$  обозначала бы случайную силу урагана;  $\lambda$  — частоту появления урагана;  $D$  — его случайную продолжительность, а  $\sigma_V$  и  $\sigma_V$  характеризовали бы турбулентную составляющую, которая вызывает колебания сооружения.

### 3. ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ НЕСУЩИХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

#### 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

##### 1. ВЕРОЯТНОСТЬ ОТКАЗА И ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Рассмотрение надежности конструкций методами теории вероятностей, безусловно, приводит к тому, чтобы оценивать надежность через вероятность. При этом исходят из представления, что сооружение или элемент сооружения могут пребывать только в двух состояниях:  $V$  — отказ;  $\bar{V}$  — безотказная работа. Обоим состояниям могут быть сопоставлены вероятности.

Вероятность отказа или вероятность выхода из строя  $P_f = P(V)$  есть вероятность того, что в рассматриваемое время будет превойдено предельное состояние и таким образом будет достигнуто состояние отказа  $V$ . Вероятность безотказной работы или вероятность выживания  $P_s = P(\bar{V})$  есть вероятность того, что за время  $T$  не будет выхода за предельное состояние.

Таким образом,  $P_f$  и  $P_s$  относятся к определенному времени. Чаще всего в качестве такого принимается период службы сооружения.

Событие  $\bar{V}$  противоположно событию  $V$ , так что по формуле (2.2)

$$P_f + P_s = 1. \quad (3.1)$$

Обычно в строительстве рассматривается вероятность отказа, а не вероятность безотказной работы. Это нагляднее и имеет, как мы увидим, преимущества в численной оценке.

##### 2. К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА

Если принять вероятность отказа в качестве меры надежности, то возникает вопрос, как ее определять. Можно пред-



ложить оценивать ее на основе статистического анализа повреждений и определения частоты отказов как приближения вероятности отказов. Так делается в электронике при оценке массовых событий малой длительности.

Однако по разным причинам в строительстве такой путь исключен:

строительные сооружения являются системами с большой надежностью, их выход из строя редкое событие и в связи с этим вероятность отказа очень мала; для ее статистической оценки потребовался бы столь большой объем выборки, которого невозможно добиться;

имеется только малое число однотипных сооружений или их частей: конструкций индивидуального использования столь много, что не может быть единой основы для сбора статистики, но и для единичных объектов необходимо оценивать надежность;

сроки службы сооружений очень велики; даже если и можно сделать приемлемые выводы на основе статистики повреждений, эти выводы появятся тогда, когда они, в лучшем случае, будут иметь исторический интерес.

Конечно, статистические данные о повреждениях имеют большое значение для получения практических знаний о поведении конструкций в реальных условиях. Однако оценить по этим данным вероятность отказа едва ли возможно.

Тем не менее даже для индивидуальных сооружений на основе случайных величин можно определить свойства, носящие массовый характер и оцениваемые статистически. К этим свойствам относятся свойства строительных материалов, производимых и испытываемых как массовые продукты, внешних нагрузок, которые часто повторяются и могут наблюдаться и оцениваться, геометрических размеров, грунтов, а также соединений, стыков и т. д.

Все эти параметры в теории надежности несущих конструкций определяются как базисные переменные и обозначаются  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Они могут быть представлены математически как случайные величины или стохастические процессы и найдены на основе статистических исследований.

Если соединить законы механики с правилами теории вероятностей, то с помощью базисных переменных можно теоретически определить вероятность наступления состояний отказа. Это и есть генеральная задача теории надежности несущих строительных конструкций. Такой теоретический путь доступен в следующих случаях:

известна исчерпывающая статистическая информация о базисных переменных  $X_i$ ;

имеются математически сформулированные законы механики, определяющие связи между внешним воздействием

и внутренним сопротивлением (несущей способностью) конструкции;

определено предельное состояние, к которому относится вероятность отказа;

правила действий со случайными числами и стохастическими процессами достаточно разработаны, чтобы их применить с разумными затратами для решения проблем механики.

### 3. ОПЕРАТИВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОТКАЗА

Идти теоретическим путем — значит получить только часть общей вероятности отказа, а именно только ту часть, которая определяется учитываемыми в расчете базисными переменными. В этом теоретическом значении, естественно, не содержится возможный вклад за счет ошибочных действий человека.

Если также предположить появление ошибки за счет механической модели, то вероятность отказа будет больше, чем теоретическая. Иногда выбирается механическая модель, которая дает запас прочности. В таком случае вышеприведенное высказывание неверно.

Важен и другой аспект. Теоретически найденная вероятность отказа весьма чувствительна к изменениям стохастической модели. С помощью статистических исследований можно достаточно надежно оценить среднюю часть кривой плотности распределения, а также среднее и стандартное отклонение. Однако поведение плотности на краях (на «хвостах») нельзя обосновать статистически. Здесь следует указать на исходные предпосылки и гипотезы, которые, к сожалению, очень сильно влияют на результат, особенно на малые значения вероятностей, а именно с такими значениями и приходится иметь дело.

Поэтому вводится понятие «оперативная вероятность отказа». Это есть теоретическая вероятность, которая может служить инженеру как сравнительная величина и оказывает решающую помощь в качественной оценке прочности и надежности. Она является условной вероятностью, действительной только при выполнении целого комплекса предположений, например о типах распределений для базисных переменных. Эта величина связана с теоретической моделью и не может быть отделена от нее. Оперативные вероятности отказа могут быть сравнимы между собой только в том случае, если они найдены для моделей со сравнимыми предпосылками. Поскольку все последующие теоретические исследования распространяются именно на оперативные вероятности отказов, для краткости мы опускаем прилагательное. В последующих разделах будет говориться о вероятности отказа, подразумевая эту теоретически вычисляемую долю ее.

Правда, несовершенство оперативной вероятности отказа кажется несущественным, если она понимается не как мера общей надежности, а как вспомогательное средство инженеру для принятия решений о назначении размеров конструкции и выборе материала или для назначения запасов надежности в строительных нормах и правилах. Оперативная вероятность отказа охватывает только часть аспектов проблемы надежности, однако именно ту часть, которая имеет решающее значение для проектирования и конструирования. Поскольку трудно поддающаяся оценке вероятность ошибочных действий человека не зависит от назначенных параметров конструкции, едва ли она оказывает влияние на назначение экономически оптимальных параметров [3, 6].

Хотя вероятность наступления отказа из-за ошибочных действий человека, как правило, больше, чем теоретическая оперативная вероятность отказа, она пренебрежимо мало влияет на проект.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА ОТ ВРЕМЕНИ

Вероятность отказа является функцией времени  $t$ . Это совершенно очевидно, если вспомнить о зависимости нагрузок и воздействий, а также свойств материалов от времени. Чем больше период времени, к которому относится вероятность отказа, тем больше возможность отказа и тем больше в связи с этим становится вероятность того, что состояние отказа будет достигнуто. Таким образом,  $P_f$  является монотонно возрастающей функцией времени: при  $t_1 < t_2$

$$P_f(t_1) \leq P_f(t_2). \quad (3.2)$$

Если предположить, что сооружение в начальный момент своего существования  $t=0$  находится в состоянии безотказной работы, то имеют место два граничных значения:

$$P_f(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_f(t) = 1.$$

Дополнение  $L(t) = 1 - P_f(t) = P_s(t)$  называется функцией надежности и представляет собой вероятность того, что сооружение просуществует время  $t$  (здесь  $L(t)$  — монотонно убывающая функция времени).

Время измеряется или в единицах времени (например, в годах), или числом циклов нагружения. Вторым вариантом используется обычно в задачах усталости.

Сказанное означает, что теория надежности всегда должна учитывать зависимость вероятности отказа от времени. Всюду, где сегодня классическая статика пренебрегает влиянием вре-

мени, оно, безусловно, должно учитываться в исследованиях надежности. Даже при часто принимаемых упрощающих предположениях о независимости от времени свойств материала в исследованиях надежности нельзя уйти от зависимости нагрузок от времени. Только в особых случаях, имеющих чисто теоретическое значение, когда как внешняя нагрузка, так и внутреннее сопротивление не меняются во времени, можно пренебречь его влиянием.

Реальные строительные конструкции выполнены из материалов, свойства которых зависят от времени. Все материалы подвержены процессам старения, усталости, упрочнения, коррозии, ползучести и другим зависящим от времени явлениям, которые изменяют несущую способность, чаще всего в сторону уменьшения. Эти явления существенно влияют на вероятность отказа.

Если использовать вероятность отказа как меру надежности, то подходящая функция, которая пробегает все значения от 0 до 1, может быть выбрана только тогда, когда дополнительно будет назначен соответствующий период времени.

Естественным периодом времени представляется срок службы сооружения.

Однако имеются и другие точки зрения относительно этого периода. Сроки службы для сооружений разного вида весьма различаются. В наше быстро текущее время вообще трудно предсказать эти сроки. Здесь в лучшем случае возможны вероятностные прогнозы.

То обстоятельство, что статистическая информация сегодня неполна и определяется за время более короткое, чем срок службы, говорит о том, что период, к которому относится вероятность отказа, должен быть относительно меньше. Оценка вероятности отказа за время, соизмеримое со сроком службы, требует определенной экстраполяции, которая математически возможна, но, безусловно, принесет с собой ошибки.

Появились предложения в качестве рассматриваемого для оценки вероятности отказа периода выбрать период в один год [3.7, 4.4]. Ценность этого предложения сомнительна для всех задач, в которых изменения сопротивления во времени играют решающую роль. Процессы старения и усталости ведут к учащению случаев отказа к концу срока службы, и рассмотрение только первого года легко приведет к ошибочным оценкам.

Целесообразно положить в основу исследований срок службы также и при решении задач оптимизации методами теории надежности.

Таким образом, можно заключить, что выбрать единый отрезок времени невозможно, — этот выбор зависит от решаемой задачи.

### 5. СРОК СУЩЕСТВОВАНИЯ И СРОК СЛУЖБЫ СООРУЖЕНИЯ

Под сроком существования сооружения  $T_L$  будем понимать время от начала его эксплуатации до наступления отказа. Срок существования сооружения есть случайная величина и имеет плотность и функцию распределения.

Если, к примеру, сооружение откажет после 20 лет, то говорят:  $t_1=20$  лет — реализация случайной величины  $T_L$ . Как случайная величина  $T_L$  не является сроком существования какого-то определенного реального сооружения. Для определенного сооружения всегда имеет место только реализация  $t_L$  случайной величины  $T_L$ .

Функция распределения  $F_{T_L}(t)$  равна вероятности того, что срок существования сооружения  $T_L$  меньше или равен  $t$ . Но это и есть вероятность того, что до момента времени  $t$  появится отказ:

$$F_{T_L}(t) = P(T_L \leq t) = P_f(t). \quad (3.3)$$

Итак, вероятность отказа равна функции распределения срока существования сооружения. Представленная на рис. 3.1

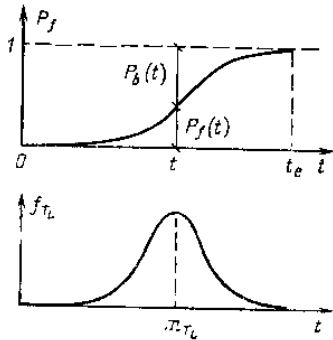


Рис. 3.1. Зависимость вероятности отказа от времени

зависимость вероятности отказа от времени позволяет понимать ее и как функцию распределения срока существования сооружения. Плотность распределения получается путем дифференцирования

$$f_{T_L} = dF_{T_L}(t)/dt = dP_f(t)/dt. \quad (3.4)$$

Средняя продолжительность существования сооружения получается из

$$E[T_L] = m_{T_L} = \int_0^{t_e} t f_{T_L}(t) dt = \int_0^{t_e} t dF_{T_L}(t).$$

где  $t_e$  — момент времени, при котором вероятность отказа равна 1;  $P_f(t_e) = F_{T_L}(t_e) = 1$ , т. е. достоверно наступление события отказа; в предельном случае  $t_e$  может стремиться к бесконечности

Интегрирование по частям дает:

$$\begin{aligned} m_{T_L} &= [tF_{T_L}(t)]_0^{t_e} = \int_0^{t_e} F_{T_L}(t) dt = \\ &= t_e - \int_0^{t_e} F_{T_L}(t) dt = \int_0^{t_e} [1 - F_{T_L}(t)] dt = \\ &= \int_0^{t_e} [1 - P_f(t)] dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, средний срок существования можно определить геометрически как площадь над кривой  $P_f(t)$  (см. рис. 3.1).

Подобным образом можно вычислить дисперсию срока существования сооружения:

$$\text{Var}[T_L] = \sigma_{T_L}^2 = 2 \int_0^{t_e} t [1 - P_f(t)] dt - m_{T_L}^2. \quad (3.6)$$

Мы видим, что вероятность отказа и срок существования зависят друг от друга. Это значит, что надежность может быть оценена как понятие «вероятность отказа», так и понятием «срок существования сооружения». Так, к примеру, высказывание «для периода 50 лет вероятность отказа равна  $10^{-3}$ » идентично высказыванию «0,001-квантиль срока существования сооружения равен 50 годам».

Под сроком службы  $T$  понимается период времени предполагаемой будущей эксплуатации сооружения, для которого должна быть гарантирована надежность и безопасность. Срок службы является планируемой величиной, как правило, имеющей постоянное значение.

Поскольку срок существования сооружения является случайной величиной с большим разбросом, требования безопасности, чтобы срок существования сооружения был больше срока службы, могут относиться к ее квантилю. Очевидно, что для срока службы рассматривается только малое значение квантиля срока существования. После простого преобразования из выражения (3.3) следует, что требование надежности по сохранению допустимой вероятности отказа за срок службы  $P_f(T) \leq z$  идентично требованию, чтобы соответствующее  $z$   $P_L$  значение квантиля срока существования сооружения  $q_{T_L}$  было равно или больше, чем срок службы

$$q_{T_L} \geq T \text{ при } q_{T_L} = F_{T_L}^{-1}(z | P_f). \quad (3.7)$$

где  $F_{T_L}^{-1}$  функция, обратная функции распределения срока существования сооружения.

Теория надежности может оперировать как с понятием «вероятность отказа», так и с понятием «срок существования сооружения». Второй вариант имеет известные преимущества применительно к относительно недолговечным массовым изделиям, как, например, это имеет место в электронике. Здесь срок существования отдельных элементов может быть найден также прямой статистической оценкой.

В строительном деле с его весьма долговечными изделиями, где отказ отдельных элементов может быть теоретически определен из сравнения нагрузки и сопротивления, предпочтителен первый вариант.

## 6. ПЛОТНОСТЬ ОТКАЗОВ

Плотность отказов  $h_t(t)$  служит характеристикой надежности во времени. Она отвечает на вопрос о том, какова вероятность отказа в интервале времени  $(t, t+\Delta t)$  для сооружения, которое уже достигло возраста  $t$ . Величина  $h_t(t)\Delta t$  определяется как вероятность того, что безотказно работающее до момента  $t$  сооружение откажет в последующий интервал времени  $(t, t+\Delta t)$ :

$$h_t \Delta t = P(T_L \leq t + \Delta t | T_L > t).$$

Учитывая выражение (2.5), получим:

$$\begin{aligned} h_t \Delta t &= \frac{P\{(T_L \leq t + \Delta t) \cap (T_L > t)\}}{P(T_L > t)} = \\ &= \frac{P(t < T_L \leq t + \Delta t)}{P(T_L > t)} = \frac{f_{T_L}(t) \Delta t}{1 - F_{T_L}(t)}; \\ h_t &= f_{T_L}(t) / [1 - F_{T_L}(t)]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

С учетом выражений (3.3) и (3.4) можно записать:

$$h_t = \frac{1}{1 - P_f(t)} \frac{dP_f(t)}{dt}. \quad (3.9)$$

Таким образом, плотность отказа не является ни вероятностью, ни плотностью распределения. Она имеет размерность  $[T^{-1}]$ .

Плотность отказа, представленная графически, почти всегда имеет характерный вид, показанный на рис. 3.2. В начале срока существования, в фазе I, многократно встречаются выбросы. В строительных конструкциях это вызывается большей частью низким качеством работ и недостаточно качественными материалами. Если в начале срока прикладываются нагрузки, то такие недостатки качества уже вскоре становятся заметными из-за случаев отказа. Затем следует фаза II

с относительно постоянной плотностью отказов. Здесь чаще всего отказы вызываются перегрузками. В последней фазе III плотность отказов вновь возрастает за счет зависящего от времени падения сопротивления конструкции вследствие процессов усталости, старения или коррозии.

Вероятность отказа  $P_f$ , вероятность безотказной работы  $P_s$ , плотность распределения  $f_{T_L}$  срока существования сооружения и плотность отказов  $h_t$  являются функциями, которые полностью характеризуют изменение надежности во

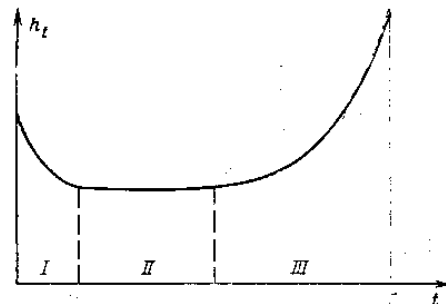


Рис. 3.2. Характерный график плотности отказов

времени. Эти функции взаимосвязаны, что можно легко видеть из выражений (3.3), (3.4), (3.8) и (3.9). Эти зависимости сведены в табл. 3.1. Ради полноты картины сюда добавлен и рассмотренный ранее обобщенный индекс безопасности  $\beta_v$ .

## 7. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ КАК ФУНКЦИЯ БАЗИСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Предельное состояние есть состояние, при переходе за которое сооружение перестает соответствовать поставленным требованиям. В настоящее время предельные состояния по степени ограничений в эксплуатации и возможных последствий отказа разделяются на две группы [4.1, 4.3, 4.4].

К первой группе относятся предельные состояния, при выходе за которые возникает полная потеря пригодности к эксплуатации. По работе [4.1] к этой группе относятся: обшая потеря устойчивости; потеря устойчивости положения; разрушение любого характера; переход в изменяемую систему; качественное изменение конфигурации; состояния, при которых возникает необходимость прекращения эксплуатации вследствие чрезмерных деформаций ползучести и пластичности, сдвиг в соединениях или чрезмерного раскрытия трещин. При переходе через эти предельные состояния часто

Таблица 3.1. Зависимости между характеристиками надежности

	$P_f$	$P_s$	$\beta_v$	$f_{TL}$	$h_t$
$P_f$	$P_f$	$1 - P_s$	$\Phi[-\beta_v]$	$\int_0^t f_{TL}(\tau) d\tau$	$1 - \exp\left[-\int_0^t h_t(\tau) d\tau\right]$
$P_s$	$1 - P_f$	$P_s$	$\Phi(\beta_v)$	$\int_0^\infty f_{TL}(\tau) d\tau$	$\exp\left[-\int_0^\infty h_t(\tau) d\tau\right]$
$\beta_v$	$-\Phi^{-1}(P_f)$	$\Phi^{-1}(P_s)$	$\beta_v$	$\Phi^{-1}\left[\int_0^\infty f_{TL}(\tau) d\tau\right]$	$\Phi^{-1}\left(\exp\left[-\int_0^\infty h_t(\tau) d\tau\right]\right)$
$f_{TL}$	$\frac{dP_f}{dt}$	$-\frac{dP_s}{dt}$	$-\Phi(\beta_v) \frac{d\beta_v}{dt}$	$f_{TL}$	$h_t(t) \exp\left[-\int_0^t h_t(\tau) d\tau\right]$
$h_t$	$\frac{1}{1 - P_f} \frac{dP_f}{dt}$	$-\frac{d}{dt} (\ln P_s)$	$\frac{\Phi(\beta_v)}{\Phi(\beta_v)} \frac{d\beta_v}{dt}$	$\frac{f_{TL}}{\int_0^\infty f_{TL}(\tau) d\tau}$	$h_t$

возникает опасность для жизни и здоровья людей или ожидается большой материальный ущерб.

Ко второй группе относятся предельные состояния, при выходе за которые затрудняется нормальная эксплуатация: недопустимые деформации; недопустимые уровни колебаний; недопустимые изменения положения; недопустимые образования или раскрытие трещин. При выходе за эти предельные состояния не возникает опасности для жизни и здоровья, а материальный ущерб ограничен.

Предельные состояния могут быть отнесены к конструкции в целом (например, общее разрушение или недопустимо большие остаточные деформации), либо к отдельным элементам или поперечным сечениям (например, превышение предела текучести в одном из поперечных сечений), либо к основаниям (например, чрезмерные осадки или разность осадок).

Как правило, сооружение может отказать по многим предельным состояниям. Поскольку предельные состояния редко бывают четко выражены, для количественных оценок требуются определения, которые могут быть заданы пределами для деформаций, напряжений, перемещений и разностей перемещений, поворотов, раскрытия трещин, амплитуд колебаний и других параметров. Будем считать, что имеются однозначные определения.

Для количественных оценок предполагается также, что существует механическая модель, в которой возможно описание предельного состояния с помощью уравнений или алгоритма в зависимости от величин, допускающих их прямое измерение или наблюдение.

Эти величины в теории надежности несущих конструкций называются базисными переменными  $X_i$ . Большей частью базисные переменные являются случайными числами, иногда стохастическими процессами, для которых может быть собрана статистическая информация. К ним относятся нагрузки, свойства материалов и грунтов и геометрические размеры. Несовершенства модели могут также быть учтены в уравнениях механики в соответствии с формулой (2.1) путем введения дополнительных базисных переменных. Так, в примере 2.18 для учета приближенности гипотезы Майнера вводятся как случайные числа коэффициенты Майнера.

Совокупность определяющих надежность сооружения базисных переменных представляется случайным вектором

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Для дальнейшего исследования целесообразно проблемы с базисными переменными рассматривать в  $m$ -мерном пространстве. Каждая точка

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

этого пространства есть одна реализация случайного вектора  $X$ . Определим в общем случае уравнение предельного состояния в виде:

$$g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0. \quad (3.12)$$

Причем  $g$  определяется так, что

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) < 0 \quad (3.13)$$

означает отказ по рассматриваемому предельному состоянию, а

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq 0 \quad (3.14)$$

соответствует безотказной работе. Подобная формулировка справедлива без ограничений.

Уравнение предельного состояния (3.12) представляет собой в пространстве базисных переменных гиперповерхность, которая делит все пространство на две части, а именно на «область отказа»

$$V = \{x | g(x) < 0\}, \quad (3.15)$$

в которой  $g(x) < 0$  для всех векторов  $x$ , и на «безопасную область»

$$S = \{x | g(x) \geq 0\}, \quad (3.16)$$

в которой уравнение предельного состояния равно нулю или положительной величине.

Рис. 3.3 поясняет это для двумерного случая, когда уравнение предельного состояния есть плоская кривая.

Пока отсутствует единство мнений по поводу самого предельного состояния: относить ли его к безопасной области или к области отказа, т. е. в выражении (3.13) или в выражении (3.14) должен стоять знак равенства. Большая часть авторов имеет иное мнение, чем представленное в данной книге. Мы присоединяемся к точке зрения СЭВ [4.1] и ИСО [4.3], которые само предельное состояние относят к безопасной области. Это имеет то преимущество, что детерминистические выражения для проверки несущей способности, содержащиеся в нор-

мах, являются равенствами. Впрочем, по теории вероятностей различие в этих постановках не имеет значения, поскольку для непрерывной функции  $g(x)$ , очевидно,  $P[g(x)=0)] = 0$ . Геометрически предельное состояние представляет собой внешнюю поверхность безопасной области.

Никаких ограничивающих допущений в отношении структуры функции  $g$ , кроме предпосылки, что  $g$ , по крайней мере, единожды, дифференцируема по всем  $x_i$  не делается. Это условие необходимо для развития приближенных методов решения проблемы и почти всегда имеет место в практических задачах.

Часто бывает возможно выделить в уравнении предельного состояния  $g(x) = 0$  результирующие сопротивления и нагрузку и записать это уравнение в форме

$$g(x) = r - s = 0, \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } r &= g_R(x_{R_1}, x_{R_2}, \dots); \\ s &= g_S(x_{S_1}, x_{S_2}, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

соответственно сопротивление и нагрузка.

При этом  $x_{R_i}$  являются базисными переменными, определяющими несущую способность, а  $x_{S_i}$  — величинами, определяющими внешнее воздействие.

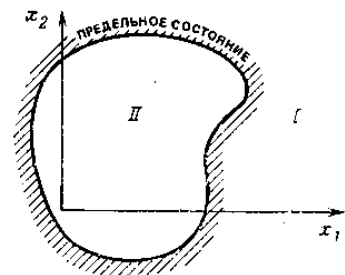


Рис. 3.3. К определению предельного состояния в пространстве базисных переменных (векторные величины подчеркнуть)  
I — область отказа; II — область безотказной работы

Если базисные переменные случайные величины или стохастические процессы, то и  $R$ , и  $S$  как функции  $X_i$  также являются случайными числами или стохастическими процессами:

$$\left. \begin{aligned} R &= g_R(X_{R_1}, X_{R_2}, \dots); \\ S &= g_S(X_{S_1}, X_{S_2}, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Разность

$$Z = R - S \quad (3.20)$$

называется запасом прочности (см. рис. 1.1). Если  $Z=0$ , то это значит, что достигнуто предельное состояние, при  $Z<0$  наступает отказ, а при  $Z\geq 0$  отказ не наступает.

Расщепление функции предельного состояния  $g$  на «сопротивление»  $g_R$  и «нагрузку»  $g_S$  для многих достаточно сложных задач невозможно. В качестве примера можно указать на предельное состояние наклонных подпорных стен при опрессовывании, где собственный вес земляной засыпки, с одной стороны, через горизонтальное давление выступает как нагрузка, а с другой стороны — через вертикальное давление — как сопротивление. Поэтому  $R$  и  $S$  в данном случае не являются независимыми и между ними существует корреляционная связь.

В общем случае уравнений (3.20) и (3.12) случайную величину

$$Z=g(X)=g(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (3.21)$$

называют запасом прочности.

В дальнейшем изложении для вычисления вероятности превышения этого предельного состояния будет использоваться как общая форма (3.12), так и частный случай (3.17).

Следует также упомянуть, что предельное состояние может быть описано с помощью различных эквивалентных уравнений. Поясним это на примере  $r-s=0$ .

Это уравнение в плоскости  $r-s$  можно представить как прямую, наклоненную под углом  $45^\circ$ . Эта прямая может быть представлена в виде  $r/s-1=0$  или  $\ln r-\ln s=0$  и другими формулами.

## 3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА

### 1. ОБЗОР

Прежде чем заняться деталями определения вероятности отказа, дадим обзор проблем, обсуждаемых в последующих пунктах.

Для предельных состояний широкого класса отказ наступает в том случае, когда нагрузки в первый раз превысят уровень внутреннего сопротивления конструкции. Примерами служат предельные состояния потери устойчивости, разрушения или образования кинематической цепи за счет развития пластических шарниров.

Расчет вероятности отказа в подобном случае особенно прост, если базисные переменные, определяющие несущую способность, не меняются во времени и если в рассматриваемый период времени действует только один единственный импульс переменной нагрузки. При этом величины нагрузки и сопротивления могут быть случайными. Эта задача служит

основой для рассмотрения более сложных проблем. Поэтому ее решение будет далее детально рассмотрено. Центром тяжести является приближенный способ, основанный на теории надежности 1-го порядка, который относительно прост и универсален в решении практических задач.

Однако в действительности нагрузка на сооружения может действовать многократно; она изменяется во времени. С помощью теории распределения экстремальных значений эта проблема может быть сведена к задаче, не зависящей от времени, если воздействует только одна единственная зависящая от времени нагрузка, несущая способность конструкции не меняется во времени. При этом достаточно рассмотреть только наибольшее пиковое значение нагрузки, появляющееся в течение рассматриваемого интервала времени.

Сложнее проблемы, в которых многие базисные переменные зависят от времени. Если действуют две (и более) переменные нагрузки, возникает проблема их сочетаний. Однако и сопротивление конструкции может быть подвержено изменениям, например за счет коррозии. Далее подробно рассматриваются подобные проблемы, при этом основное внимание уделяется линейной комбинации взаимонезависимых процессов нагружения. Даются простые приближенные решения.

Отказ может последовать не только за счет единственного пересечения критического уровня. При часто повторяющихся нагрузках возникают явления усталости материала, и в случайный момент времени при относительно невысоком уровне нагрузки может возникнуть внезапное усталостное разрушение. Эта проблематика несколько отличается от чисто статических случаев, поэтому далее будут приведены основные положения по определению вероятности отказа при усталостных явлениях на основе гипотезы Майнера, причем будет показано, как эта проблема приближенно может быть решена средствами теории 1-го порядка.

Как правило, статическая система может отказать не по одному, а по различным предельным состояниям (например, разрушение при изгибе и сдвиге, потеря устойчивости, разрушение основания), и эти предельные состояния могут возникнуть в различных элементах сооружения. В общем случае сооружение находится в состоянии отказа, если произошел выход за какое-либо из предельных состояний в каком-либо из элементов конструкции. Теория надежности дает инструмент, позволяющий определить вероятность отказа по какому-либо из предельных состояний как меру безопасности. Вероятность отказа системы естественно больше, чем вероятность отказа по какому-либо одному предельному состоянию. В механических системах запасы прочности по различным предельным состояниям являются взаимно коррелированными, что существенно усложняет проблему по сравнению с мно-

гими проблемами надежности в электронике или машиностроении. Поэтому, как правило, определяются верхние и нижние оценки вероятности отказа системы.

## 2. ОТКАЗ ПО ОДНОМУ ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ

### Все базисные переменные — случайные величины

Рассмотрим случай, когда все случайные величины, определяющие нагрузку и сопротивление, не меняются во времени или имеется только одна переменная нагрузка с одним единичным импульсом в рассматриваемый период времени. В этом случае вектор базисных переменных  $X$  составлен из случайных величин. Исходим из того, что имеется полная информация о распределении вероятностей  $X$ .

**Строгое решение.** В  $m$ -мерном пространстве базисных переменных каждой точке  $x$  соответствует плотность распределения  $f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_X(x)$ . Это исходное пространство, называемое также  $x$ -пространством, делится уравнением предельного состояния на безопасную область  $S = \{x | g(x) \geq 0\}$  и область отказа  $V = \{x | g(x) < 0\}$ . По правилам определения вероятность отказа  $P_f = P[g(x) < 0]$  равна интегралу по плотности распределения по области отказа:

$$P_f = \int_{\{x | g(x) < 0\}} f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (3.22)$$

Аналогично для вероятности безотказной работы

$$P_s = \int_{\{x | g(x) \geq 0\}} f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (3.23)$$

или в векторной форме:

$$\left. \begin{aligned} P_f &= \int_V f_X(x) dx; \\ P_s &= \int_S f_X(x) dx, \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

где  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_m$ .

Поскольку  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$  сумма вероятностей отказа

и безотказной работы всегда равна 1. В частном случае стохастически независимых  $X_j$  имеем:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_m}(x_m),$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} P_f &= \int_V \dots \int \prod_{i=1}^m f_{X_i}(x_i) dx_i; \\ P_s &= \int_S \dots \int \prod_{i=1}^m f_{X_i}(x_i) dx_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Если случайные числа имеют дискретное распределение, соответствующие интегралы заменяются суммами.

Итак, вычисление вероятности отказа сведено к интегрированию в  $m$ -мерном пространстве. Таким образом, для математика проблема решена, но численное решение сталкивается в общем случае с существенными трудностями. Интегрирование в замкнутом виде возможно только в частных случаях. Численное интегрирование легко выполняется только при малом числе базисных переменных.

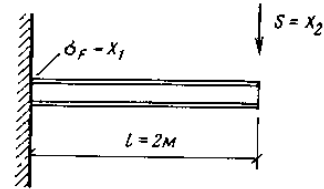


Рис. 3.4. К примеру 3.1

**Пример 3.1.** Консоль (рис. 3.4) нагружена сосредоточенной силой. Эта сила  $S = X_2$  распределена по закону распределения экстремальных значений типа I. Предел текучести стали  $\sigma_f = X_1$  подчиняется обобщенному (сдвинутому) логнормальному закону с минимальным значением  $x_0$ . Разбросом остальных параметров, например момента сопротивления и пролета  $l$ , пренебрегаем. Параметры распределений:

$i$	$m_i = E[X_i]$	$\sigma_{X_i} = (\text{Var}[X_i])^{1/2}$	$x_{0i}$	Тип
1	265 000	25 000	160 000	LNV
2	18	2	—	EXI

Упругий и пластический моменты сопротивления поперечного сечения и длина пролета составляют:

$$W_{e1} = 2,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3; W_{pl} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3; l = 2 \text{ м}.$$

Как велика при этих предположениях вероятность того, что в заделке появится текучесть в крайних волокнах, и какова вероятность образования там пластического шарнира?

Задача решается численным интегрированием.



Текущее наступает, если  $X_2 > WX_1$ . Таким образом, уравнение предельного состояния имеет вид:

$$g(x) = WX_1 - lx_2 = 0.$$

Найдем параметры обоих распределений. По табл. 5 прил. II для логнормального распределения:

$$\sigma_u = \sqrt{\ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_{X_1}}{m_{X_1} - x_{01}} \right)^2 \right]} = 0,2348,$$

$$m_u = \ln(m_{X_1} - x_{01}) - \sigma_u^2/2 = 11,534,$$

а для распределения экстремальных значений:

$$a = 1,28255/\sigma_{X_2} = 0,6413,$$

$$u = m_{X_2} - 0,57722/a = 17,1.$$

Вероятность отказа есть интеграл по плотности распределения по области отказа, и по формуле (3.25) получаем:

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{\{x|g(x)<0\}} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{lx_2/W} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(lx_2/W) f_{X_2}(x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Вводя функцию распределения для логнормального закона (см. табл. 5 прил. II)

$$F_{X_1} \left( \frac{lx_2}{W} \right) = \Phi \left\{ \frac{1}{\sigma_u} \left[ \ln \left( \frac{lx_2}{W} \right) - x_{01} \right] - m_u \right\}$$

и плотность распределения для экстремальных значений (см. табл. 6 прил. II)

$$f_{X_2}(x_2) = a \exp \{ -a(x_2 - u) - \exp[-a(x_2 - u)] \}.$$

можно выполнить численное интегрирование по правилу Симпсона:

$x_2$	$F_{X_1} \left( \frac{lx_2}{W} \right) f_{X_2}(x_2)$
20	$5,791 \cdot 10^{-10}$
22	$7,904 \cdot 10^{-8}$
24	$1,850 \cdot 10^{-4}$
26	$3,999 \cdot 10^{-4}$
28	$2,906 \cdot 10^{-4}$
30	$1,241 \cdot 10^{-4}$
32	$4,113 \cdot 10^{-4}$
34	$1,219 \cdot 10^{-5}$
36	$3,458 \cdot 10^{-6}$

$$P_f \approx \frac{2}{3} 3,213 \cdot 10^{-3} = 2,142 \cdot 10^{-3}.$$

Вычисление с меньшим шагом дает  $P_f = 2,131 \cdot 10^{-3}$ .

Аналогичные вычисления для случая образования пластического шарнира при  $W = W_{pl}$  дают  $P_f = 1,398 \cdot 10^{-4}$ .

Весьма простое теоретически численное интегрирование ограничивается случаем малого числа переменных. Вычислительные затраты растут пропорционально степени  $m$  числа переменных  $X_i$  и при  $m=5$  или  $m=6$  численное интегрирование практически невозможно выполнить. Поэтому численное интегрирование нельзя рассматривать как универсальное средство определения вероятностей отказа.

В связи с этим большая часть усилий в теории надежности несущих конструкций направлена на то, чтобы решить эту главную задачу достаточно точно приближенными методами.

Прежде чем рассматривать приближенные методы, обратимся к некоторым важным частным случаям, допускающим интегрирование в замкнутом виде.

**Вектор базисных переменных имеет одну компоненту.** Если механическая модель содержит только одну случайную величину  $X$ , то пространство базисных переменных сводится к оси  $x$ . Ось делится уравнением предельного состояния  $g(x) = 0$  на две области, а вероятность отказа  $P_f = \int_{\{x|g(x)<0\}} f_X(x) dx$

представляет собой площадь под кривой плотности распределения для области, где  $g(x)$  отрицательна (рис. 3.5).

Если обозначить через  $g^{-1}$  функцию, обратную к  $g(x)$ , и  $g(x)$  является монотонно возрастающей функцией, то

$$P_f = \int_{x < g^{-1}(0)} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{g^{-1}(0)} f_X(x) dx = F_X[g^{-1}(0)], \quad (3.26)$$

где  $F_X$  — функция распределения  $X$ .

Функция  $g(x)$  монотонно возрастает, если  $X$  представляет собой величину, которая повышает внутреннее сопротивление конструкции. Это могут быть, например, прочность или размеры поперечного сечения. Если же  $X$  представляет собой внешнюю нагрузку, то  $g(x)$  монотонно убывает, и получается

$$P_f = \int_{x > g^{-1}(0)} f_X(x) dx = \int_{g^{-1}(0)}^{\infty} f_X(x) dx = 1 - F_X[g^{-1}(0)]. \quad (3.27)$$

**Пример 3.2.** В стенке резервуара из бетона толщиной  $d = 10$  см возникают максимальные растягивающие усилия  $s = 100$  кН/м. Как усилия, так и толщина стенки имеют пренебрежимо малые разбросы. Прочность бетона на растяжение подчиняется нормальному закону со средним  $m_{X_1} = 2,5$  кН/мм<sup>2</sup> и коэффициентом вариации 18%. Какова вероятность появления трещины в бетоне при максимальном растягивающем усилии?

Обозначим единственную случайную величину прочности бетона на растяжение  $X$ . Уравнение предельного состояния по образованию трещин имеет вид:

$$g = x - s/d = 0,$$

причем  $g$  монотонно возрастает с увеличением  $x$ . Параметр  $g=0$  при  $x=s/d$  и по выражению (3.26)

$$P_f = F_X(s/d).$$

Поскольку  $X$  нормально распределена, то по табл. 1 прил. II:

$$s/d = 100/0,1 = 1000 \text{ кН/м}^2;$$

$$E[X] = 2500 \text{ кН/м}^2;$$

$$\sigma_X = 2500 \cdot 0,18 = 450 \text{ кН/м}^2;$$

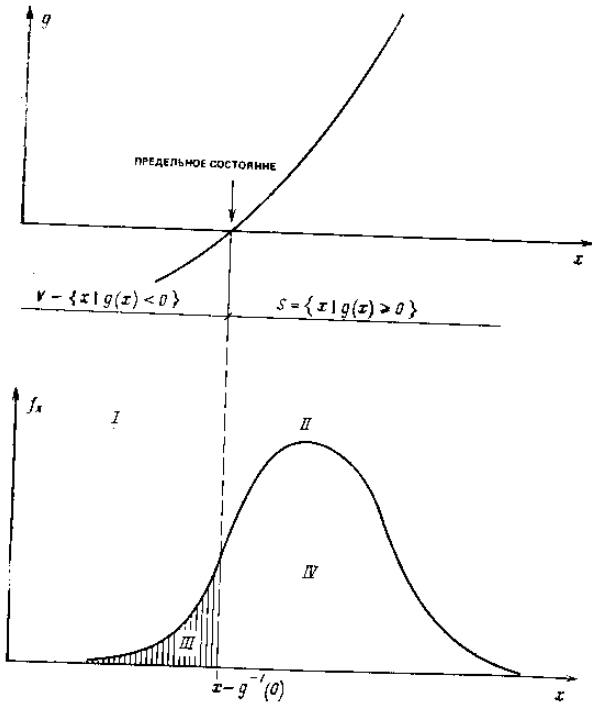


Рис. 3.5. К определению вероятности отказа для одномерного случая  
I — область отказа; II — область безотказной работы; III — площадь, равная вероятности отказа  $P_f$ ; IV — площадь, равная вероятности безотказной работы  $1 - P_f$

$$P_f = \Phi\left(\frac{s/d - m_X}{\sigma_X}\right) = \Phi\left(\frac{1000 - 2500}{450}\right) = \Phi(-3,333) = 4,291 \cdot 10^{-4}.$$

Величина  $\Phi$  может быть найдена по таблицам работы [3.8], или по приближенным формулам табл. 3 прил. II, или работы [2.9].

**Базисные переменные независимы и нормально распределены, уравнение предельного состояния линейно.** Если все случайные величины имеют нормальное распределение, а уравнение предельного состояния линейно относительно  $X_i$ , то вероятность отказа может быть найдена в замкнутом виде. Приведем подробный вывод необходимых соотношений, поскольку этот случай представляет основу приближенных способов для более общих проблем. В случае нормально распределенных независимых случайных величин  $m$ -мерная плотность распределения выражается в виде:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_m}(x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \prod_{i=1}^m \sigma_{X_i}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}}\right)^2\right], \quad (3.28)$$

где  $m_{X_i} = E[X_i]$  — математическое ожидание случайной величины  $X_i$ ;  $\sigma_{X_i} = (\text{Var}[X_i])^{1/2}$  — стандартное отклонение случайной величины  $X_i$ .

Будучи линейным, уравнение предельного состояния имеет вид:

$$g(x) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i x_i, \quad (3.29)$$

где  $c_i$  — неслучайные постоянные, которые определяются структурой статической системы.

Дальнейшие выкладки сильно упростятся, если вместо исходного пространства базисных переменных ввести пространство стандартизованных базисных переменных, называемое также  $y$ -пространством. Для этого вводятся новые неизвестные:

$$Y_i = \frac{X_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, \quad (3.30)$$

имеющие нулевое среднее и единичное стандартное отклонение.

Плотность распределения стандартизованных величин

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m y_i^2\right] \quad (3.31)$$

обладает в  $y$ -пространстве шаровой симметрией относительно начала координат. Гиперповерхности равных плотностей рас-

представляет собой  $m$ -мерные сферы с центром в начале координат.

Функцию предельного состояния в  $y$ -пространстве можно записать в виде:

$$h(y) = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i m_{x_i} + \sum_{i=1}^m c_i \sigma_{x_i} y_i = 0. \quad (3.32)$$

И в  $y$ -пространстве уравнение предельного состояния линейно, оно образует  $m$ -мерную гиперплоскость. Целесообразно преобразовать это линейное соотношение в форму Гессе [2.8]. При этом получим:

$$h(y) = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i + \beta = 0, \quad (3.33)$$

где

$$\alpha_i = c_i \sigma_{x_i} / \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_i \sigma_{x_i})^2}, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad (3.34)$$

$$\beta = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i m_{x_i} / \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_i \sigma_{x_i})^2}. \quad (3.35)$$

Величина  $\beta$  играет большую роль в теории надежности несущих конструкций и называется индексом безопасности.  $\beta$  положительна, если начало координат  $y$ -пространства лежит в безопасной области, т. е.  $h(0) > 0$ , и  $\beta$  отрицательна, если начало координат лежит в области отказа,  $h(0) < 0$ . Абсолютная величина  $\beta$  представляет кратчайшее расстояние от начала координат  $y=0$  до поверхности предельного состояния  $h(y)=0$  в  $y$ -пространстве стандартизованных случайных величин. В дальнейшем это кратчайшее расстояние обозначается

$$\delta = |\beta|. \quad (3.36)$$

Величины  $\alpha_i$  называются коэффициентами чувствительности. Геометрически они соответствуют взятым с обратным знаком направляющим косинусам перпендикуляра, опущенного из начала координат на  $h(y)$ . На рис. 3.6 представлены плотности распределения и уравнения предельного состояния для двух случайных переменных в  $x$ -пространстве и в пространстве стандартизованных переменных  $y$ -пространства, где показаны  $\beta$  и  $\alpha_i$ .

Определение вероятности отказа выполняется по выражению (3.25), но интегрирование ведется по области отказа в  $y$ -пространстве:

$$P_f = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\{y|h(y)<0\}} \dots \int_{i=1}^m \prod_{i=1}^m \exp\left(-\frac{y_i^2}{2}\right) dy_i.$$

В связи с шаровой симметрией плотности распределения подынтегральное выражение оказывается инвариантным по отношению к повороту координатных осей. Выберем новую систему координат  $u_1, u_2, \dots, u_m$  так, чтобы условие отказа приняло особенно простой вид. Совместим ось  $u_1$  с направлением  $\beta$  (см. рис. 3.6). Тогда область отказа определится простым уравнением  $\beta = u_1 < 0$ ,

$$P_f = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{u_1=\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^m \exp\left(-\frac{u_i^2}{2}\right) du_i \times \left(-\frac{u_1^2}{2}\right) du_1.$$

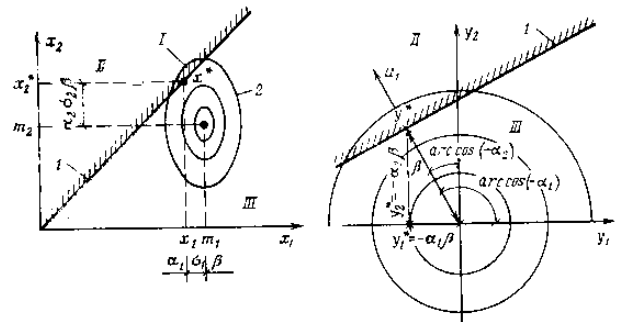


Рис. 3.6. Плотности распределения и поверхности предельных состояний в исходном  $x$ -пространстве и в  $y$ -пространстве стандартизованных нормальных величин для двумерного случая (векторные величины подчеркнуты)

$I$  — объем плотности в области отказа;  $II$  — область отказа;  $III$  — область безотказной работы;  $1$  — предельное состояние;  $2$  — линия равных плотностей распределения

Учитывая, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta),$$

получаем вероятность отказа

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.37)$$

и вероятность безотказной работы

$$P_s = 1 - \Phi(-\beta) = \Phi(\beta), \quad (3.38)$$

где  $\Phi$  определяется по выражению (2.37).

Индекс безопасности  $\beta$  находится здесь в прямом соотношении с оперативной вероятностью отказа. Вычисление вероятности отказа в этом случае заметно упрощается. Параметр  $\beta$  определяется по соотношению (3.36), а вероятность отказа вычисляется по выражению (3.37), или по таблицам функции распределения для нормального закона, или по приближенным формулам табл. 3 прил II.

В табл. 3.2 приведены некоторые значения  $\beta$  и соответствующие им вероятности отказа.

Таблица 3.2. Соотношение между индексом безопасности и вероятностью отказа

$\beta$	$P_f = \Phi(-\beta)$	$P_f$	$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$
0	0,5	0,5	0
1	$1,587 \cdot 10^{-1}$	$10^{-1}$	1,282
2	$2,275 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$	2,327
3	$1,350 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	3,091
4	$3,169 \cdot 10^{-5}$	$10^{-4}$	3,179
5	$2,871 \cdot 10^{-7}$	$10^{-5}$	4,265
6	$9,901 \cdot 10^{-10}$	$10^{-6}$	4,753
7	$1,288 \cdot 10^{-12}$	$10^{-7}$	5,199
8	$6,285 \cdot 10^{-16}$	$10^{-8}$	5,612
9	$1,145 \cdot 10^{-19}$	$10^{-9}$	5,997
10	$7,770 \cdot 10^{-24}$	$10^{-10}$	6,361

Рассмотрим несколько подробнее физический и геометрический смысл полученных величин (см. рис. 3.6). Каждой точке  $y$ -пространства стандартизированных нормальных переменных по выражению (3.31) соответствует некоторая плотность распределения. Уравнение предельного состояния  $h(y) = 0$  пересекает это пространство, и каждой точке на линии  $h(y) = 0$  также соответствует некоторая плотность распределения. На основе свойства симметрии нормального распределения эта плотность имеет максимум в основании перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость предельного состояния:

$$\max_{(y|h(y) \leq 0)} f_y(y) = f_y(y^*) \quad (3.39)$$

В точке  $y^*$  плотность распределения в области отказа и предельного состояния имеет свой максимум. Но это означает, что при наступлении отказа выход за предельное состояние наиболее вероятен в окрестности точки  $y^*$ . Тогда  $y^*$  является «наиболее вероятной точкой отказа». Ее координаты

$$y_i^* = -\alpha_i \beta, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.40)$$

Еще больший практический интерес представляет положение этой точки в исходном пространстве  $x$ . Из выражений (3.40) и (3.30) следует:

$$x_i^* = m_{x_i} - \alpha_i \sigma_{x_i} \beta. \quad (3.41)$$

Если  $X_i$  нормально распределенная величина, то  $f_x(x)$  имеет максимум в точке  $x^*$ , т. е.

$$\max_{\{x|g(x) \leq 0\}} f_x(x) = f_x(x^*). \quad (3.42)$$

В случае базисных переменных с иным распределением выражение (3.42) является приближенным.

Как будет показано далее в гл. 5, эта наиболее вероятная точка отказа является очень подходящей точкой для назначения расчетных значений детерминистических норм с уровнем надежности  $P_f = \Phi(-\beta)$ . Тогда  $y^*$  или  $x^*$  называется поэтому проектной точкой и имеет большое значение в теории нормирования.

Каждая координата проектной точки по выражению (3.41) определяется четырьмя величинами:  $m_{x_i}$ ,  $\sigma_{x_i}$ ,  $\alpha_i$  и  $\beta$ . Математическое ожидание  $m_{x_i} = E[X_i]$  и стандартное отклонение  $\sigma_{x_i}$  определяют распределение вероятностей  $X_i$ . Коэффициент чувствительности  $\alpha_i$  служит мерой относительного вклада разброса  $X_i$  в общий разброс коэффициента безопасности  $\beta$ . Коэффициенты  $\alpha_i$  показывают, какой «вес» имеет величина  $X_i$  в данной проблеме, и могут принимать значения в интервале от  $-1$  до  $1$ . Если  $\alpha_i$  близок к  $-1$  или к  $1$ , то это значит, что разброс  $X_i$  вносит решающий вклад в рассматриваемую задачу надежности. Если же  $\alpha_i$  лежит в районе нуля, то разброс  $X_i$  практически не имеет значения. Таким образом, коэффициенты чувствительности указывают на каких базисных переменных следует сконцентрировать статистические исследования.

Знак  $\alpha_i$  определяет, в какой области распределения (верхней или нижней) расположена проектная точка. Знак  $\alpha_i$  в литературе определяется по-разному. В данной книге принято, что  $\alpha_i$  положительны для величин, определяющих сопротивление, и отрицательны для величин, определяющих нагрузки.

Геометрически коэффициенты чувствительности соответствуют направляющим косинусам перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость предельного состояния, и поэтому для них справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 1. \quad (3.43)$$

Индекс безопасности  $\beta$  учитывает в выражении (3.41) влияние уровня надежности  $P_f$  на положение проектной точки.

Для дальнейшего изложения целесообразно перейти к матричному представлению. Если определить векторы и матрицы

$$\begin{aligned} c &= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}; E[X] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{X_1} \\ \vdots \\ m_{X_m} \end{pmatrix}; \\ x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}; \\ \alpha &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}; C_X = \begin{pmatrix} \text{Var}[X_1] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \text{Var}[X_m] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{X_m}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

то полученные результаты могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} g(x) &= c_0 + c^T x; \\ h(y) &= c_0 + c^T E[X] + c^T C_X^{1/2} y; \\ \alpha &= C_X^{1/2} c / \sqrt{c^T C_X c}; \\ \beta &= (c_0 + c^T E[X]) / \sqrt{c^T C_X c}; \\ y^* &= -\alpha\beta; x^* = E[X] - C_X^{1/2} \alpha\beta = \\ &= E[X] - C_X c \beta / \sqrt{c^T C_X c}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

**Пример 3.3.** Рассмотрим вновь консоль из примера 3.1, но теперь в предположении, что обе случайные величины подчиняются нормальному закону распределения с теми же средними и стандартными отклонениями. Поскольку уравнение предельного состояния  $g(x) = Wx_1 - lx_2$  линейно относительно  $x_i$ , можно применить выражения (3.34) и (3.35) с  $c_1 = W$  и  $c_2 = -l$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{W c_1 m_{X_1} - l m_{X_2}}{\sqrt{(W c_1 \sigma_{X_1})^2 + (l \sigma_{X_2})^2}} = \\ &= \frac{2,14 \cdot 10^{-4} \cdot 26,5 \cdot 10^4 - 2 \cdot 18}{\sqrt{(2,14 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 \cdot 10^4)^2 + (2 \cdot 2)^2}} = 3,1; \\ \alpha_1 &= \frac{W c_1 \sigma_{X_1}}{\sqrt{(W c_1 \sigma_{X_1})^2 + (l \sigma_{X_2})^2}} = 0,8009; \\ \alpha_2 &= \frac{-l \sigma_{X_2}}{\sqrt{(W c_1 \sigma_{X_1})^2 + (l \sigma_{X_2})^2}} = -0,5988. \end{aligned}$$

Оперативная вероятность отказа  $P_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-3,1) = 9,676 \cdot 10^{-4}$   
Положение проектной точки в  $y$ -пространстве:

$$\begin{aligned} y_1^* &= -0,8009 \cdot 3,1 = -2,483; \\ y_2^* &= 0,5988 \cdot 3,1 = 1,856. \end{aligned}$$

Положение проектной точки в  $x$ -пространстве:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 26,5 \cdot 10^4 - 0,8009 \cdot 2,5 \cdot 10^4 \cdot 3,1 = 20,29 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2; \\ x_2^* &= 18 + 0,5988 \cdot 2 \cdot 3,1 = 21,71 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Аналогичный расчет с пластическим моментом сопротивления  $W_{pl}$  дает для предельного состояния по образованию пластического шарнира:

$$\begin{aligned} \beta &= 4,076; P_f = 2,292 \cdot 10^{-5}; x_1^* = 17,92 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2; \\ \alpha_1 &= 0,8423; y_1^* = -3,433; x_2^* = 22,39 \text{ кН}; \\ \alpha_2 &= -0,5391; y_2^* = 2,197. \end{aligned}$$

Для контроля может служить  $\sum \alpha_i^2 = 1$  и  $\sqrt{\sum y_i^2} = \beta$ .

Проектирование по координатам проектной точки дает соответствующий момент сопротивления  $W = lx_2^*/x_1^*$ .

Полученные в примерах 3.1 и 3.3 вероятности отказов существенно различаются и это подчеркивает влияние, которое оказывает тип распределения на оперативную вероятность отказа.

**Базисные переменные стохастически зависимы и нормально распределены, уравнение предельного состояния линейно.** До сих пор делалось предположение, что все  $X_i$  независимы друг от друга. Если между  $X_i$  имеется стохастическая зависимость, т. е. матрица ковариаций (2.85) не является диаго-

нальной, то при преобразовании из  $x$ -пространства с плотностью распределения

$$f_x(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |C_x|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \times \right. \\ \left. \times (x - E[X])^T C_x^{-1} (x - E[X]) \right\} \quad (3.46)$$

в  $y$ -пространство случайных независимых стандартизированных нормальных величин

$$f_y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} y^T y \right) \quad (3.47)$$

следует сначала повернуть систему координат к главным осям. Это делается преобразованием матрицы ковариаций к диагональной форме.

Рассмотрим нормально распределенный случайный вектор  $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$  с вектором математических ожиданий  $E[X] = (E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_m])$  и матрицей ковариаций

$$C_x = \begin{pmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2] & \dots & \text{Cov}[X_1, X_m] \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \text{Cov}[X_m, X_1] & \text{Cov}[X_m, X_2] & \dots & \text{Var}[X_m] \end{pmatrix}; \quad (3.48)$$

$$\text{Var}[X_i] = \sigma_{x_i}^2; \quad \text{Cov}[X_i, X_j] = \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \rho_{ij}$$

Введем новые случайные величины  $U = (U_1, U_2, \dots, U_m)^T$ , выбранные так, что их матрица ковариаций

$$C_U = \begin{pmatrix} \text{Var}[U_1] & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \text{Var}[U_m] \end{pmatrix}$$

является диагональной.

Это может быть получено по известным правилам линейной алгебры преобразованием

$$u = A^T x \quad \text{и} \quad x = A u, \quad (3.49)$$

если  $A$  — ортогональная матрица, столбцы которой образованы нормированными собственными векторами матрицы  $C_x$ . Случайные величины  $U$  также нормально распределены с математическими ожиданиями

$$E[U] = A^T E[X] \quad (3.50)$$

и матрицей ковариаций

$$C_U = A^T C_x A. \quad (3.51)$$

Диагональные элементы  $C_U$  равны собственным значениям матрицы  $C_x$ . В силу ортогональности  $A^{-1} = A^T$ .

Как и ранее преобразуем  $U_i$  в стандартизированные случайные величины

$$y = C_U^{-1/2} (u - E[U]). \quad (3.52)$$

Используя выражения (3.49) и (3.50), получаем:

$$y = C_U^{-1/2} A^T (x - E[X]) \quad (3.53)$$

или, обратно,

$$x = E[X] + A C_U^{1/2} y. \quad (3.54)$$

Для  $Y_i$  имеет место  $E[Y] = 0$ ,  $C_Y = I$ , где  $I$  — единичная матрица. Для определения кратчайшего расстояния  $\beta$  до плоскости предельного состояния в  $y$ -пространстве выражение (3.54) подставляется в уравнение предельного состояния

$$g(x) = c_0 + c^T x = 0 \quad (3.55)$$

и получается

$$h(y) = c_0 + c^T E[X] + c^T A C_U^{1/2} y = 0. \quad (3.56)$$

Это уравнение вновь преобразуем в нормальную форму Гессе:

$$h(y) = a^T y + \beta = 0,$$

причем

$$\beta = \frac{c_0 + c^T E[X]}{\sqrt{c^T A C_U^{1/2} C_U^{1/2} A^T c}} = \frac{c_0 + c^T E[X]}{\sqrt{c^T C_x c}}, \quad (3.57)$$

$$a^T = c^T A C_U^{1/2} / \sqrt{c^T C_x c}. \quad (3.58)$$

Вероятность отказа вычисляется по выражению (3.37):

$$P_f = \Phi(-\beta).$$

Во многих практических приложениях представляет интерес положение проектной точки в  $x$ -пространстве. Вводя  $y^* = -a\beta$  в уравнение (3.54), получим после преобразований с учетом формулы (3.51)

$$x^* = E[X] - C_x c \beta / \sqrt{c^T C_x c}. \quad (3.59)$$

Из выражений (3.57) и (3.59) видно, что определение индекса безопасности, вероятности отказа и координат проектной точки вовсе не требует утомительного решения проблемы

собственных значений. Для  $\beta$  и  $x^*$  получаются те же результаты, что и в случае независимых  $X_i$  [см. формулу (3.45)], только в последнем случае матрица  $C_X$  не является диагональной.

Если же требуется знать положение проектной точки в  $y$ -пространстве, то обойти определенно  $C_U$  и  $A$  не удается:

$$y^* = -C_U^{-1/2} A^T c_0 / \sqrt{c^T C_X c}. \quad (3.60)$$

**Пример 3.4.** Шарнирно опертая балка пролетом 10 м нагружена осевым давлением экипажей, как показано на рис. 3.7. Силы  $X_1, \dots, X_4$  под-

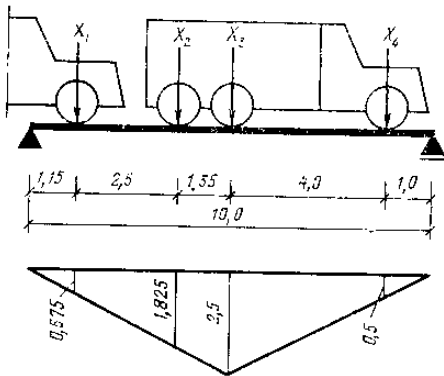


Рис. 3.7. Балка под нагрузкой от экипажей со случайными давлениями на оси

чиняются нормальному закону распределения со следующими параметрами:

$i$	$E\{X_i\}, \text{кН}$	$\sigma_i, \text{кН}$
1	40	12
2	100	35
3	100	35
4	40	12

Осевые давления различных экипажей стохастически независимы, осевые давления разных осей одного экипажа коррелированы. Матрица коэффициентов корреляции имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0.6 \\ 0 & 0.9 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Места расположения грузов не являются случайными. Какова вероятность того, что изгибающий момент в середине балки для расположения грузов, показанный на рис. 3.7, при одпорзовом нагружении превысит нормативный момент  $M^{(n)} = 1230 \text{ кН}\cdot\text{м}$ :

$$P(M^{(n)} < M) = P(M^{(n)} - M < 0); M = \sum_i c_i X_i.$$

где  $c_i$  — ординаты линии влияния изгибающего момента в середине пролета.

Сравнивая с выражением (3.55)  $P[g(x) < 0] = P(c_0 + c^T x < 0)$ , получим для данного случая:  $c_0 = M^{(n)} = 1230$ ;  $c^T = -(-0.575, -1.825, -2.5, -0.5)$ .

Матрица ковариаций  $C_X$  с учетом того, что  $\text{Cov}[X_i, X_j] = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ , имеет вид:

$$C_X = \begin{pmatrix} 144 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1225 & 1102.5 & 252 \\ 0 & 1102.5 & 1225 & 252 \\ 0 & 252 & 252 & 144 \end{pmatrix}.$$

Далее получаем:

$$c^T C_X c = 22970.2; c_0 + c^T E[X] = 1230 - 475.7 = 754.5.$$

Индекс безопасности  $\beta = 754.5 / \sqrt{22970.2} = 4.978$ .

Вероятность превышения нормативного значения момента составит:

$$P(M^{(n)} < M) = \Phi(-\beta) = \Phi(-4.978) = 3.217 \cdot 10^{-7}.$$

Координаты проектной точки следуют из формулы (3.59):

$$x^* = \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{22970.2}} \begin{pmatrix} -82.8 \\ -5117.9 \\ -5200.6 \\ -1161.9 \end{pmatrix} 4.978 = \begin{pmatrix} 42.72 \\ 93.10 \\ 279.81 \\ 78.16 \end{pmatrix}.$$

Для контроля вычислений может служить условие, что  $x^*$  удовлетворяет уравнению предельного состояния  $c_0 + c^T x^* = 0$ .

Таким образом, решена часть задачи, представляющая интерес в общем случае. Для полного выяснения проблемы покажем путь получения  $y^*$ .

Характеристический полином для  $C_X$

$$(144 - \lambda)(\lambda^3 - 2594\lambda^2 + 510910.75\lambda - 25498620) = 0$$

имеет корни:  $\lambda_1 = 144$ ;  $\lambda_2 = 122.5$ ;  $\lambda_3 = 2384.1951$ ;  $\lambda_4 = 87.3050$ , которые являются элементами диагональной матрицы  $C_U$ .

Соответствующие нормированные собственные векторы образуют столбцы матрицы преобразования:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.707107 & -0.707107 & 0 \\ 0 & 0.698325 & 0.698325 & 0.157110 \\ 0 & -0.111093 & -0.111093 & 0.98758 \end{pmatrix}.$$

$$C_U^{1/2} A^T c = \begin{pmatrix} -6,9 \\ 5,2827 \\ -151,3093 \\ -0,1244 \end{pmatrix};$$

$$y^* = -\frac{C_U^{1/2} A^T c}{\sqrt{22970,2}} 4,978 = \begin{pmatrix} 0,2266 \\ -0,1735 \\ 4,9698 \\ 0,0041 \end{pmatrix}.$$

Контролем может быть выполнение условия  $y^{*T} y^* = \beta^2$ .  
Примечательно сравнение с индексом безопасности, который получается в предположении полной независимости осевых грузов. В этом случае все внедиагональные члены  $C_X$  равны нулю, и получается  $\beta = 754,5 / \sqrt{11819,9} = 6,94$ .

Если рассмотреть другой предельный случай полной зависимости осевых грузов для одного экипажа ( $\rho_{2,3} = \rho_{2,4} = \rho_{3,4} = 1$ ), то получим:  $\beta = 754,5 / \sqrt{24814,7} = 4,79$ .

Пример показывает большое влияние корреляции между нагрузками, пренебрежение которой приводит к существенным ошибкам.

**R-S-модель.** Надежность несущей конструкции при статическом нагружении определяется соотношением между внешней нагрузкой  $S$  и внутренним сопротивлением  $R$ . Отказ наступает при  $R < S$ . Если известны распределения  $R = X_1$  и  $S = X_2$ , то получаем задачу надежности, которая не только просто решается, но на которой наглядно могут быть прослежены общие закономерности. В связи с большим практическим значением рассмотрим этот особый случай и приведем все необходимые зависимости для определения вероятности отказа.

В соответствии с выражением (3.19)  $R$  и  $S$  сами являются функциями других случайных величин. Из зависимости (3.22) с учетом уравнения предельного состояния

$$g(x) = x_1 - x_2 = r - s = 0 \quad (3.61)$$

следует или

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f(r, s) dr ds, \quad (3.62)$$

если сначала интегрируют по  $r$ , или

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_r^{\infty} f(r, s) ds dr, \quad (3.63)$$

если сначала интегрируют по  $s$ .

Большой частью нагружение и сопротивление стохастически не зависят друг от друга. Тогда интегрирование можно выполнить непосредственно

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad (3.64)$$

или

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(r)] f_R(r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} G_S(r) \times f_R(r) dr. \quad (3.65)$$

причем  $G_S(r) = 1 - F_S(r)$ .

Строгое решение ограничено некоторыми частными случаями законов распределения. В остальных случаях легко использовать способ численного интегрирования. Строгое решение возможно, если и  $R$ , и  $S$  подчиняются или нормальному, или логнормальному закону распределения.

В случае нормального закона:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= (E[R] - E[S]) / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}; \\ P_f &= \Phi(-\beta); \quad \alpha_R = \sigma_R / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}; \\ \alpha_S &= -\sigma_S / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

Координаты проектной точки в исходном пространстве:

$$\left. \begin{aligned} r^* &= E[R] - \sigma_R^2 \beta / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}; \\ s^* &= E[S] + \sigma_S^2 \beta / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

Если ввести коэффициент

$$\bar{\alpha} = E[R] / E[S], \quad (3.68)$$

то индекс безопасности можно представить в виде:

$$\beta = (\bar{\alpha} - 1) / \sqrt{\bar{\alpha}^2 v_R^2 + v_S^2}, \quad (3.69)$$

где  $v_R = \sigma_R / E[R]$  — коэффициент вариации для сопротивления;  $v_S = \sigma_S / E[S]$  — коэффициент вариации для нагрузки.

Если  $R$  и  $S$  коррелированные величины с коэффициентом корреляции  $\rho$ , то, вводя матрицы

$$\left. \begin{aligned} c &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad E[X] = \begin{pmatrix} E[R] \\ E[S] \end{pmatrix}; \\ C_X &= \begin{pmatrix} \sigma_R^2 & \rho \sigma_R \sigma_S \\ \rho \sigma_R \sigma_S & \sigma_S^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$



по выражению (3.57) получим;

$$\beta = \frac{c^T E[X]}{V \frac{c^T C X c}{c}} = \frac{E[R] - E[S]}{V \frac{\sigma_R^2 - 2\rho\sigma_R\sigma_S + \sigma_S^2}{c}},$$

или

$$\beta = \frac{\bar{y} - 1}{V \frac{\bar{y}^2 v_R^2 - 2\bar{y}\rho v_R v_S + v_S^2}{c}}. \quad (3.71)$$

Отсюда следует, что с ростом корреляции между  $R$  и  $S$  увеличивается индекс безопасности и падает вероятность отказа.

Координаты проектной точки по выражению (3.59):

$$\left. \begin{aligned} r^* &= E[R] - (\sigma_R^2 - \rho\sigma_R\sigma_S\beta) / \\ & \quad / \sqrt{\sigma_R^2 - 2\rho\sigma_R\sigma_S + \sigma_S^2}; \\ s^* &= E[S] + (\sigma_S^2 - \rho\sigma_R\sigma_S\beta) / \\ & \quad / \sqrt{\sigma_R^2 - 2\rho\sigma_R\sigma_S + \sigma_S^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Если  $R$  и  $S$  независимы и распределены по логнормальному закону, то уравнение предельного состояния (3.61) целесообразно представить в форме  $r/s=1$ . Логарифмируя, получим:

$$\ln r - \ln s = 0. \quad (3.73)$$

Случайные величины

$$U_R = \ln R \text{ и } U_S = \ln S \quad (3.74)$$

распределены логнормально с параметрами (см. табл. 5 прил. II):

$$\left. \begin{aligned} m_{U_R} &= \ln E[R] - \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma_R^2); \\ \sigma_{U_R} &= \sqrt{\ln(1 + \sigma_R^2)}; \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

$m_{U_S}$  и  $\sigma_{U_S}$  вычисляются аналогично.

Таким образом, проблема сведена к случаю нормального распределения, и мы можем использовать выражение (3.66):

$$\beta = (m_{U_R} - m_{U_S}) / \sqrt{\sigma_{U_R}^2 + \sigma_{U_S}^2}.$$

С учетом уравнений (3.75) и (3.68) выражение для индекса безопасности примет вид:

$$\beta = \frac{\ln E[R] - \ln E[S] + \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma_S^2) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma_R^2)}{\sqrt{\ln(1 + \sigma_R^2) + \ln(1 + \sigma_S^2)}},$$

или

$$\beta = \frac{\ln \bar{y} - \frac{1}{2} \ln[(1 + \sigma_R^2)/(1 + \sigma_S^2)]}{\sqrt{\ln[(1 + \sigma_R^2)(1 + \sigma_S^2)]}}. \quad (3.76)$$

Координаты проектной точки:

$$\left. \begin{aligned} r^* &= \exp \left( \ln \frac{E[R]}{\sqrt{1 + \sigma_R^2}} - \frac{\ln(1 + \sigma_R^2)\beta}{\sqrt{\ln(1 + \sigma_R^2) + \ln(1 + \sigma_S^2)}} \right); \\ s^* &= \exp \left( \ln \frac{E[S]}{\sqrt{1 + \sigma_S^2}} + \frac{\ln(1 + \sigma_S^2)\beta}{\sqrt{\ln(1 + \sigma_R^2) + \ln(1 + \sigma_S^2)}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

Итак, получены простые формулы для вычисления индекса безопасности, вероятности отказа и координат проектной точки в этих основных задачах.

**Метод моментов.** Выше предполагалось, что полностью известны функции и плотности распределения всех случайных величин  $X_i$ .

Однако для установления с достаточной достоверностью типа распределения требуется большой объем выборок, в особенности для зон на «хвостах» распределений, которого, как правило, нет на практике. С другой стороны, эти «хвосты» оказывают решающее влияние на вероятность отказа. Это хорошо видно из сравнения примеров 3.1 и 3.3, в которых различался только тип распределения, что привело к изменению вероятности отказа в 2 раза. Назначаемые при проектировании сечения элементов конструкции также могут существенно зависеть от типа распределения.

В связи с этим возникает сомнение, может ли вероятность отказа служить мерой надежности и может ли она быть определена с достаточной степенью достоверности. Дискуссия по этому вопросу в прошлые годы привела к появлению двух существенно различных принципиальных точек зрения.

Первое теоретическое направление исходит из предположения исчерпывающего знания распределений базисных пере-

менных и вычисляет вероятность отказа как интеграл по плотности распределения по области отказа. Вероятность отказа понимается как мера надежности и как прогноз относительной частоты отказов для большого числа однотипных конструкций, правда, если распределения базисных переменных всегда соответствуют принятым законам. Эта зависимость от принятых гипотез привела к понятию «оперативной» вероятности, рассмотренному в п. 3.1. К выбору типа распределения привлекаются не только статистические данные. Если, например, какая-то нагрузка имеет наибольшее значение в течение длительного периода времени, то для нее имеет смысл принять распределение экстремальных значений; если случайная величина является суммой многих независимых влияний, то принимается нормальный закон и т. д.

Совершенно иные, прагматические подходы — называемые «методами моментов» — исходят из того, что при приемлемых затратах времени всегда можно найти первые два момента, т. е. математическое ожидание, стандартное отклонение, а также ковариации на основе методов оценок, оптимальным образом использующих имеющуюся статистическую информацию. В этом случае, очевидно, нельзя уже найти вероятность отказа. Можно найти лишь индекс безопасности, который определяется первыми двумя моментами и не зависит от типа распределения.

Выражения (3.35) и (3.57) показывают, что  $\beta$  и в самом деле зависит только от математических ожиданий  $E[X_i]$ , стандартных отклонений  $\sigma_{X_i} = (\text{Var}[X_i])^{1/2}$  и в случае зависимых переменных от ковариаций  $\text{Cov}[X_i, X_j]$ . Этот путь имеет место только в случае линейных уравнений предельных состояний. Для общих случаев индекс безопасности как меру надежности следует обобщить.

Следует также заметить, что развитие науки о надежности привело за последние десятилетия к известному сближению обеих школ в отношении математических методов и способов вычислений. Так, сегодня методы расчетов обоих направлений очень похожи, в то время как философская интерпретация результатов расчета остается существенно различной.

*Индекс безопасности по Корнеллу.* В методе моментов определяются моменты запаса прочности

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (3.78)$$

по первым двум моментам заданных случайных величин  $X_i$ . Из определения (3.15) для  $g$  вытекает, что отказ возникает, если величина  $Z$  отрицательна. Знак при  $Z$  показывает, превзойдено или нет предельное состояние.

Рассмотрим сначала простой случай запаса прочности, который является линейной функцией базисных переменных:

$$Z = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i X_i. \quad (3.79)$$

Пусть заданы математические ожидания  $E[X_i] = m_{X_i}$ , дисперсии  $\text{Var}[X_i] = \sigma_{X_i}^2$  и ковариации  $\text{Cov}[X_i, X_j] = \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \rho_{X_i, X_j}$ . Методами теории вероятностей найдем моменты функции случайных величин:

$$\left. \begin{aligned} E[Z] &= m_Z = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_m) \times \\ &\times f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) \prod_i dx_i; \\ \text{Var}[Z] &= \sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x_1, x_2, \dots, x_m) - \\ &- E[g(X_1, X_2, \dots, X_m)]\}^2 f_X(x_1, \dots, x_m) \times \\ &\times \prod dx_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

Если подставить сюда выражение (3.79) и учесть, что

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \dots, x_m) \prod_i dx_i &= 1; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j f_X(x_1, \dots, x_m) \prod_i dx_i &= E[X_j] = m_{X_j}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - m_{X_j}) f_X(x_1, \dots, x_m) \prod_i dx_i &= 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - m_{X_j})^2 f_X(x_1, \dots, x_m) \prod_i dx_i &= \\ = \text{Var}[X_j] = \sigma_{X_j}^2; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - m_{X_j})(x_k - m_{X_k}) f_X \times \\ \times (x_1, \dots, x_m) \prod_i dx_i &= \text{Cov}[X_j, X_k], \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

то получим:

$$E [Z] = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i E [X_i];$$

$$\text{Var} [Z] = \sum_{i=1}^m c_i^2 \text{Var} [X_i] + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j \text{Cov} [X_i, X_j], \quad (3.82)$$

или в матричной форме

$$E [Z] = m_z = c_0 + c^T E [X];$$

$$\text{Var} [Z] = \sigma_z^2 = c^T C_X c. \quad (3.83)$$

При определении индекса безопасности как отношения математического ожидания запаса прочности к его стандартному отклонению

$$\beta_c = m_z / \sigma_z = E [Z] / \sqrt{\text{Var} [Z]} \quad (3.84)$$

в полном соответствии с выражением (3.57) получаем:

$$\beta_c = (c_0 + c^T E [X]) / \sqrt{c^T C_X c}. \quad (3.85)$$

Если же уравнение предельного состояния нелинейно, то оно может быть линеаризовано с помощью разложения Тейлора. Этот подход был распространен в 50- и 60-е годы:

$$g (x_1, \dots, x_m) = g (m_{x_1}, \dots, m_{x_m}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^m (x_i - m_{x_i}) \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=m} \quad (3.86)$$

Подставляя последнее выражение в формулу (3.78), получим:

$$E [Z] = g (m_{x_1}, \dots, m_{x_m});$$

$$\text{Var} [Z] = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \text{Var} [X_i] +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \text{Cov} [X_i, X_j]. \quad (3.87)$$

При этом все производные вычисляются в точке математического ожидания.

Если ввести вектор

$$G (m) = \left( \begin{array}{c} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_m} \end{array} \right) \Big|_{x=m}; \quad m = E [X] \quad (3.88)$$

производных уравнения предельного состояния в точке, определяемой математическими ожиданиями, то индекс безопасности можно представить в виде:

$$\beta_c = E [Z] / \sqrt{\text{Var} [Z]} =$$

$$= g (m) / \sqrt{G^T (m) C_X G (m)}. \quad (3.89)$$

Этот индекс можно представить как число стандартных отклонений  $\sigma_z$ , расположенных между нулем и средним  $m_z$  (рис. 3.8). Параметр  $\beta_c$  представляет собой обратную величину коэффициента вариации запаса прочности.

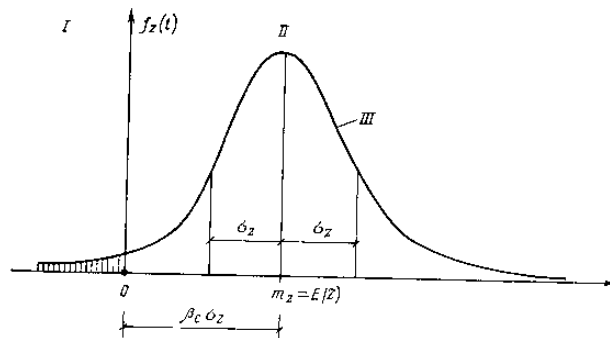


Рис. 3.8. К определению индекса безопасности  $\beta_c$  по Корнеллу  
I — область отказа  $Z < 0$ ; II — область безотказной работы,  $Z \geq 0$ ;  
III — плотность распределения запаса прочности

Развитие рассмотренного подхода содержится в работах Майера [1.10], Баслера [3.11], Блаута [3.12], Корнелла [3.15, 3.16], Бенжамина и Корнелла [3.4]. Индекс безопасности, определяемый по формуле (3.89), чаще всего связывают с именем Корнелла.

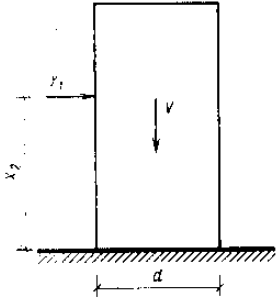


Рис. 3.9. К примеру 3.5

Пример 3.5. Жесткое тело (рис. 3.9) лежит на жестком основании ( $d=0,8$  м) и нагружено горизонтальной силой  $X_1$  на расстоянии  $X_2$  (где  $X_1$  и  $X_2$  стохастически независимы). Вертикальная сила  $V=30$  кН имеет пренебрежимо малый разброс. Параметры обеих случайных величин:

$i$	$m_{X_i} = E[X_i]$	$\sigma_{X_i} = (\text{Var}[X_i])^{1/2}$
1	6 кН	1,5 кН
2	1 м	0,2 м

Какова величина индекса безопасности  $\beta_c$  против опрокидывания тела вокруг передней грани?  
Уравнение предельного состояния  $g(x) = Vd/2 - x_1 x_2 = 0$  из-за того, что случайна не только сила, но и ее местоположение, нелинейно:

$$g(m) = V d/2 - m_{X_1} m_{X_2} = 30 \cdot 0,4 - 6 \cdot 1 = 6;$$

$$C_X = \begin{pmatrix} 1,5^2 & 0 \\ 0 & 0,2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,25 & 0 \\ 0 & 0,04 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = -x_2; \quad \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x=m} = -m_{X_2} = -1;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = -x_1; \quad \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{x=m} = -m_{X_1} = -6;$$

$$G(m) = - \left( \frac{1}{6} \right);$$

$$G^T(m) C_X G(m) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^2 \times \\ \times \sigma_{X_1}^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{X_2}^2 = (-1)^2 \times \\ \times 1,5^2 + (-6)^2 \cdot 0,2^2 = 3,69; \\ \beta_c = 6 / \sqrt{3,69} = 3,123.$$

Индекс безопасности по Корнеллу вычисляется весьма просто. Однако он обладает рядом недостатков. Наиболее существенный из них тот, что индекс  $\beta_c$  зависит от математической формулировки предельного состояния и не является инвариантным к изменению формулировки.

В п. 3.1 уже говорилось, что предельное состояние может быть представлено в различных полностью эквивалентных математических формах. От практически важной для строительства меры безопасности сооружения следовало бы ожидать независимости от простого преобразования уравнения  $g(x)$ , которое не меняет положение областей отказа и безотказной работы. К сожалению, в данном случае это не имеет места. Покажем на примере неинвариантность  $\beta_c$  к таким эквивалентным преобразованиям модели предельного состояния.

Пример 3.6. Рассмотрим еще раз пример 3.5, представив уравнение предельного состояния в форме

$$g_2(x) = \frac{V d/2}{x_1} - x_2 = 0,$$

получаемой простым делением  $g(x)$  на  $x_1$ . Оба уравнения определяют одну и ту же область отказа:

$$g_2(m) = \frac{V d/2}{m_{X_1}} - m_{X_2} = \frac{30 \cdot 0,4}{9} - 1 = 1;$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = - \frac{V d/2}{x_1^2}; \quad \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right|_{x=m} = - \frac{V d/2}{m_{X_1}^2} = - \frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2} = -1; \quad G(m) = - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$G^T(m) C_X G(m) = \left( -\frac{1}{3} \right)^2 \cdot 2,25 + (-1)^2 \cdot 0,04 = 0,29;$$

$$\beta_c = 1 / \sqrt{0,29} = 1,857.$$

Получаем совершенно иной по сравнению с примером 3.5 результат.

Поэтому Корнелл предлагал относить индекс безопасности только к запасу прочности  $Z = R - S$ . В связи с известными недостатками этой формулировки Розенблюет и Эстева рекомендовали форму  $Z = \ln R - \ln S$ .

Делались также попытки улучшить положение дела путем высших членов разложения по выражению (3.86) [3.17, 3.18]. Вычислительные затраты при этом увеличиваются, противоречия несколько смягчаются, но не исчезают полностью.

Индекс безопасности  $\beta_c$  многократно применялся в конце 60-х — начале 70-х годов при исследованиях надежности узко ограниченного класса несущих элементов в связи с разработкой норм.

**Индекс безопасности по Хазоферу и Линду.** Причины отсутствия инвариантности  $\beta_{HL}$  по формуле (3.89) к эквивалентным преобразованиям уравнения предельного состояния заключается в том, что точка, в которой  $g(x)$  раскладывается в ряд Тейлора, сама не лежит на  $g(x)=0$ . Если вести разложение в ряд не в точке математических ожиданий, а в точке, лежащей на поверхности предельного состояния, то возникает вопрос, какая из бесконечного числа точек является наиболее подходящей.

По результатам, полученным для нормально распределенных случайных величин, за такую точку следует принять проективную точку, а индекс безопасности выбирать как кратчайшее расстояние между началом координат и поверхностью состояния в пространстве стандартизированных величин. Этот индекс безопасности впервые был предложен Хазофером и Линдом [3.19].

Если дано нелинейное уравнение предельного состояния

$$g(x) = 0, \quad (3.90)$$

то сначала делается преобразование к стандартизованным величинам  $Y_i$  с математическим ожиданием  $m_{Y_i} = 0$  и стандартным отклонением  $\sigma_{Y_i} = 1$ . Если  $X_i$  независимы, то

$$y_i = \frac{x_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}}; \quad (3.91)$$

$$x_i = m_{X_i} + \sigma_{X_i} y_i.$$

Подставляя эти выражения в (3.90), получаем уравнение предельного состояния в  $y$ -пространстве:

$$h(y) = g(m_{X_1} + \sigma_{X_1} y_1, \dots, m_{X_m} + \sigma_{X_m} y_m) = 0. \quad (3.92)$$

Индекс безопасности  $\beta_{HL}$  по Хазоферу и Линду представляет собой кратчайшее расстояние между  $y=0$  и поверхностью  $h(y)=0$ :

$$\beta_{HL} = \min \left\{ \|y^T y\|^{1/2} \mid h(y) = 0 \right\}, \quad (3.93)$$

или

$$\beta_{HL} = \min \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2} \mid h(y_1, \dots, y_m) = 0 \right\} \quad (3.94)$$

Итак, определение индекса безопасности сведено к задаче экстремума с дополнительным условием.

При трактовке  $\beta_{HL}$  как кратчайшего расстояния теряется знак и выражение (3.93) справедливо только для конструк-

ций с малой вероятностью отказа. Более точным и более общим является определение:

$$\delta = \min \left\{ \|y^T y\|^{1/2} \mid h(y) = 0 \right\};$$

$$\beta_{HL} = \begin{cases} \delta, & \text{если } h(0) > 0 \\ -\delta, & \text{если } h(0) < 0 \end{cases}; \quad (3.95)$$

$\beta_{HL}$  положителен, если начало координат лежит в области безотказной работы, и отрицателен, если оно лежит в области отказа (рис. 3.10).

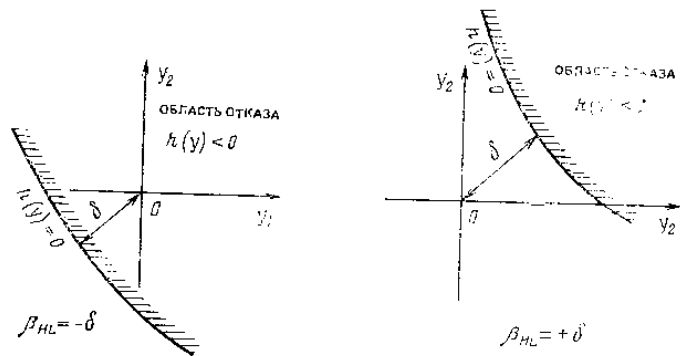


Рис. 3.10. К назначению знака индекса безопасности

Для вычисления  $\beta_{HL}$  можно использовать все методы решения задач нахождения экстремума с дополнительным условием. Приведем алгоритм решения, тесно связанный с решением уравнений (3.33)–(3.35) для линейной функции  $g(x)$ . Другие способы вкратце будут рассмотрены в связи с теорией надежности 1-го порядка, которая учитывает и тип распределения. Вычисление  $\beta_{HL}$  можно рассматривать как особый случай решаемых там задач.

Разложим уравнение предельного состояния  $h(y)=0$  в ряд Тейлора в окрестности проектной точки  $y^*$  и учтем только линейные члены. Обозначим линеаризованное уравнение через

$$l(y_1, \dots, y_m) = h(y_1^*, \dots, y_m^*) + \sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*) \frac{\partial h}{\partial y_i} \Big|_{y=y^*}. \quad (3.96)$$

Если ввести вектор производных в  $y$ -пространстве

$$H(y^*) = \left( \frac{\partial h}{\partial y_1} \Big|_{y=y^*}, \dots, \frac{\partial h}{\partial y_m} \Big|_{y=y^*} \right)^T, \quad (3.97)$$

то выражение (3.96) можно записать в виде:

$$l(y) = h(y^*) + (y - y^*)^T H(y^*). \quad (3.98)$$

Переводя это линейное уравнение в нормальную форму Гессе

$$l(y) = \alpha^T y + \delta = 0, \quad (3.99)$$

получим вектор коэффициентов чувствительности

$$\alpha = \frac{H(y^*)}{[H^T(y^*) H(y^*)]^{1/2}} \quad (3.100)$$

и кратчайшее расстояние

$$\delta = \frac{h(y^*) - y^{*T} H(y^*)}{[H^T(y^*) H(y^*)]^{1/2}}. \quad (3.101)$$

В проектной точке  $h(y^*) = 0$ , что позволяет упростить последнее выражение:

$$\delta = \frac{-y^{*T} H(y^*)}{[H^T(y^*) H(y^*)]^{1/2}}. \quad (3.102)$$

Выражение (3.101) используется в представленном далее итерационном цикле, допускающем начальный вектор, который не обязательно лежит на  $h(y) = 0$ .

Вычисление  $\delta$  было бы очень просто, если бы была известна проектная точка  $y^*$ . Находится эта точка итерационно по правилу

$$y^{k+1} = -\alpha(y^{(k)}) \delta(y^{(k)}). \quad (3.103)$$

Для исходной точки  $y^{(0)}$  по выражениям (3.100) и (3.101) отыскиваются коэффициенты чувствительности и расстояние  $\delta$ . Затем из формулы (3.103) находится улучшенное приближение и т. д. Итерационный процесс можно описать следующим образом.

1. Выбирают исходную точку  $y^{(0)}$ . Если невозможно найти более подходящую, то за исходную точку принимают начало координат  $y^{(0)} = 0$ .

2. Вычисляют значение функции предельного состояния

$$h(y^{(0)}) = g(x^{(0)}) \text{ при } x_i^{(0)} = m_{x_i} + \sigma_{x_i} y_i^{(0)}$$

и его производных в точке  $y^{(0)}$ :

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} \Big|_{y=y^{(0)}} = \sigma_{x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^{(0)}}. \quad (3.104)$$

3. Вычисляют улучшенный вектор  $y^{(1)}$  по формуле

$$y^{(1)} = -\alpha(y^{(0)}) \delta(y^{(0)}) = \frac{H(y^{(0)})}{H^T(y^{(0)}) H(y^{(0)})} \times \\ \times [y^{(0)T} H(y^{(0)}) - h(y^{(0)})]$$

с компонентами

$$y_i^{(1)} = \frac{\frac{\partial h}{\partial y_i} \Big|_{y=y^{(0)}}}{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial h}{\partial y_j} \Big|_{y=y^{(0)}} \right)^2} \times \\ \times \left[ \sum_{j=1}^m y_j^{(0)} \frac{\partial h}{\partial y_j} \Big|_{y=y^{(0)}} - h(y^{(0)}) \right]; \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (3.105)$$

Повторяют шаги 2 и 3 до достижения сходимости  $y^{(k+1)} \approx y^{(k)}$ . Тогда

$$\delta = (y^T y)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2}; \\ \beta_{HL} = \begin{cases} \delta, & \text{если } h(0) > 0 \\ -\delta, & \text{если } h(0) < 0. \end{cases}$$

Этот способ обеспечивает сходимость к минимальному расстоянию  $\delta$  или локальному минимуму в зависимости от вида функции  $h(y)$ . В сложных случаях рекомендуется начинать итерации с многими начальными векторами  $y^{(0)}$ , чтобы иметь представление о множестве решений и найти глобальный минимум (рис. 3.11).

Скорость сходимости весьма различна. Она тем выше, чем более гладкая функция  $h(y)$ . В предельном случае линейной  $h(y)$  скорость сходимости очень мала. Иногда встречается «маятниковое движение»  $y_{(k)}$  с весьма плохой сходимостью. Можно достичь существенного улучшения процесса, переходя к половинному шагу по формуле

$$y^{(k+1)} = \frac{1}{2} (y^{(k)} + y^{(k+1)}) = \\ = \frac{1}{2} \left[ y^{(k)} + \frac{H(y^{(k)})}{H^T(y^{(k)}) H(y^{(k)})} \times \right. \\ \left. \times \left( y^{(k)T} H(y^{(k)}) - h(y^{(k)}) \right) \right]. \quad (3.106)$$

Пример 3.7. Найти индекс безопасности по Хазоферу и Линду для задачи из примера 3.5:

$$g(x) = V d/2 - x_1 x_2 = 0;$$

$$h(y) = V d/2 - (m_{x_1} + \sigma_{x_1} y_1) (m_{x_2} + \sigma_{x_2} y_2) = 0;$$

$$h(y) = 6 - 1,5 y_1 + 1,2 y_2 - 0,3 y_1 y_2 = 0;$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_1} = -1,5 - 0,3 y_2; \quad \frac{\partial h}{\partial y_2} = -1,2 - 0,3 y_1.$$

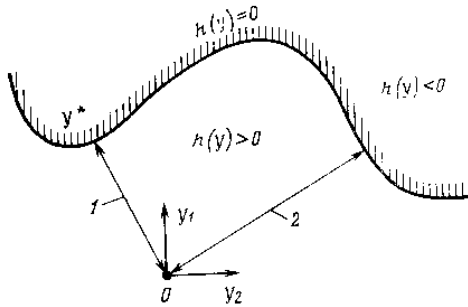


Рис. 3.11. Уравнение предельных состояний со многими минимумами

1 — глобальный минимум; 2 — локальный минимум

Вводя эти выражения в формулу (3.105), получаем итерационный процесс:

$$y_1^{(k+1)} = \frac{1,5 + 0,3 y_2^{(k)}}{(1,5 + 0,3 y_2^{(k)})^2 + (1,2 + 0,3 y_1^{(k)})^2} \times (6 + 0,3 y_1^{(k)} y_2^{(k)});$$

$$y_2^{(k+1)} = \frac{1,2 + 0,3 y_1^{(k)}}{(1,5 + 0,3 y_2^{(k)})^2 + (1,2 + 0,3 y_1^{(k)})^2} \times (6 + 0,3 y_1^{(k)} y_2^{(k)}).$$

За исходное приближение примем  $y^{(0)} = 0$ . Итерационный процесс сводим в таблицу.

k	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0	0	0	0
1	2,439	1,951	3,123
2	1,917	1,776	2,613
3	1,960	1,711	2,602
4	1,946	1,728	2,602
5	1,950	1,723	2,602
6	1,949	1,724	2,602

После третьего шага итераций кратчайшее расстояние  $\delta$  найдено с четырьмя точными знаками. Поскольку  $h(0) = 6 > 0$ , искомый индекс безопасности  $\beta_{HL} = +\delta = 2,602$  (рис. 3.12).

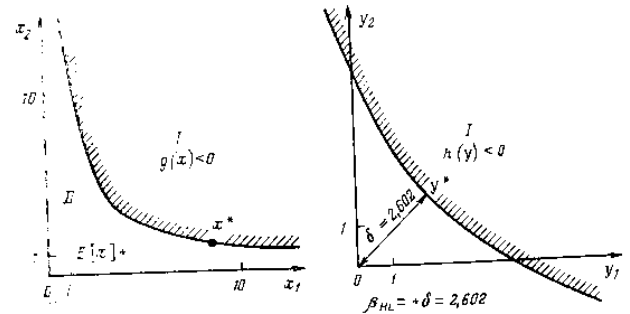


Рис. 3.12. К примерам 3.5—3.8

I — область отказа; II — область безотказной работы

Если исходить из эквивалентного уравнения

$$g_2 = \frac{V d/2}{x_1} - x_2 = 0$$

примера 3.6, то аналогичный процесс дает последовательность, которая сводится к тому же значению:

k	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0	0	0	0
1	1,724	0,690	1,857
2	2,006	1,643	2,594
3	1,932	1,742	2,601
4	1,954	1,719	2,602
5	1,947	1,726	2,602
6	1,949	1,724	2,602

Проектная точка в исходном пространстве имеет координаты:

$$x_1^* = m_{x_1} + \sigma_{x_1} y_1^* = 6 + 1,5 \cdot 1,949 = 8,924;$$

$$x_2^* = m_{x_2} + \sigma_{x_2} y_2^* = 1 + 0,2 \cdot 1,724 = 1,345.$$

При программировании для ЭВМ производные заменяются конечными разностями:

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} \approx \frac{1}{2 \Delta y_i} [h(y_i + \Delta y_i) - h(y_i - \Delta y_i)]. \quad (3.107)$$

Время счета существенно зависит от того, как часто программа обращается к вычислению функции  $h$ . Без существенной потери точности можно использовать односторонние разности:

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} \approx \frac{1}{\Delta y_i} [h(y_i + \Delta y_i) - h(y_i)]. \quad (3.108)$$

За счет этого число вызовов процедуры-функции  $h$  уменьшается вдвое.

Преимуществом итерирования в  $y$ -пространстве является то, что здесь  $\Delta y_i$  может быть принята постоянной и не зависящей от величины  $X_i$ . Во многих приложениях интервал  $\Delta y_i = 0,0001$  дает достаточную точность.

Однако итерации могут выполняться и в исходном пространстве. Это целесообразно делать при наличии корреляции между  $X_i$ . Тогда по выражениям (3.53) и (3.54) получаем:

$$y = C_U^{-1/2} A^T (x - m);$$

$$x = m + A C_U^{1/2} y.$$

Итерационный процесс по формуле (3.105) подразумевает знание матриц  $C_U^{-1/2}$  и  $A$ . Матрица  $C_U^{-1/2}$  является диагональной с элементами  $1/\sqrt{\lambda_i}$  (где  $\lambda_i$  —  $i$ -е собственное значение матрицы ковариаций  $C_X$ ). Столбцы матрицы  $A$  образуются соответствующими нормированными векторами.

Ниже предлагается итерационный процесс для общего случая коррелированных базисных переменных, который позволяет обойтись без решения проблемы собственных значений.

Поскольку  $Y_i$  и в этом случае не коррелированы, выражение (3.95) не меняется. Если подставить в него формулу (3.53) и учесть соотношение (3.51), то получаем:

$$\delta = \min \{ (x - m_X)^T C_X (x - m_X) \mid g(x) = 0 \};$$

$$\beta_{HL} = \begin{cases} \delta, & \text{если } g(m_X) > 0 \\ -\delta, & \text{если } g(m_X) < 0 \end{cases} \quad (3.109)$$

аналогичную по отношению к (3.95) задачу отыскания экстремума с дополнительным условием в  $x$ -пространстве, которая является основой для определения  $\beta_{HL}$ .

Преобразуем данный выше итерационный алгоритм из  $y$ -пространства в  $x$ -пространство. При этом следует учесть, что для векторов дифференциальных коэффициентов [см. формулы (3.88) и (3.97)] имеет место соотношение

$$H(y) = C_U^{1/2} A^T G(x). \quad (3.110)$$

Если подставить это выражение с учетом формулы (3.101) в зависимость (3.51), то после преобразований получим:

$$\delta = \frac{g(x^*) - (x^* - m_X)^T G(x^*)}{[G^T(x^*) C_X G(x^*)]^{1/2}}. \quad (3.111)$$

Или, поскольку  $g(x^*) = 0$ ,

$$\delta = \frac{-(x - m_X)^T G(x^*)}{[G^T(x^*) C_X G(x^*)]^{1/2}}. \quad (3.112)$$

С помощью выражения, подобного (3.105),

$$x^{(k+1)} = m_X - \frac{G_X G(x^{(k)})}{G^T(x^{(k)}) C_X G(x^{(k)})} \times$$

$$\times [g(x^{(k)}) - (x^{(k)} - m_X)^T G(x^{(k)})], \quad (3.113)$$

как и в  $y$ -пространстве, можно итерациями найти проектную точку. Заметим, что ни в выражении (3.112), ни в формуле (3.113) не встречаются матрицы  $C_U$  и  $A$ .

При итерациях в исходном пространстве подходящим начальным приближением является вектор математических ожиданий базисных переменных. И в этом случае можно добиться улучшения сходимости, выбирая половинный шаг:

$$x^{(k)} = \frac{1}{2} \left\{ (x^{(k)} + m_X - \frac{C_X G(x^{(k)})}{G^T(x^{(k)}) C_X G(x^{(k)})} \times \right.$$

$$\left. \times [g(x^{(k)}) - (x^{(k)} - m_X)^T G(x^{(k)})] \right\}. \quad (3.114)$$

*Пример 3.8.* Вновь рассмотрим пример 3.5, но при предположении, что горизонтальная сила  $X_1$  и плечо  $X_2$  являются коррелированными величинами с  $\rho_{X_1, X_2} = 0,5$ . Положительная корреляция означает, что большие значения силы чаще встречаются с большими значениями плеча, и в среднем опрокидывающий момент становится больше. Следует также ожидать, что получится меньший индекс безопасности, чем в предыдущих примерах. По данным примера 3.5 имеем:

$$G(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix};$$

$$C_X = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \rho_{X_1, X_2} \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \\ \rho_{X_1, X_2} \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2,25 & 0,15 \\ 0,15 & 0,04 \end{pmatrix};$$

$$G^T(x) C_X G(x) = 0,04 x_1^2 + 0,3 x_1 x_2 + 2,25 x_2^2;$$

$$g(x) - (x - m)^T G(x) = 12 - x_1 + x_1 x_2 - 6 x_2;$$

$$C_X G(x) = - \begin{pmatrix} 0,15 x_1 + 2,25 x_2 \\ 0,04 x_1 + 0,15 x_2 \end{pmatrix}.$$



Если в качестве начального приближения выбрать вектор математических ожиданий  $x^{(0)} = m_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , то по выражению (3.113) получаем итерационный процесс определения проектной точки и сводим его в таблицу.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	6	1	—
1	9,443	1,426	2,561
2	8,835	1,363	2,139
3	8,828	1,359	2,128
4	8,828	1,359	2,128

Расстояние  $\delta$  получим по выражению (3.111):

$$\delta = \frac{12 - x_1 + x_1 x_2 - 6x_2}{\sqrt{0,04x_1^2 + 0,3x_1 x_2 + 2,25x_2^2}}$$

Поскольку  $g(m_X) = 6$  положительно, имеем индекс безопасности  $\beta_{HL} = +\delta = 2,128$ . На этом примере видно относительно большое влияние корреляции между величиной нагрузки и ее местоположением.

Введение индекса безопасности по Хазоферу и Линду означало существенный прогресс по сравнению с определением  $\beta_i$  по выражению (3.89). Этот индекс стал основой норм многих стран в 70-х годах.

При использовании  $\beta_{HL}$  в качестве меры надежности следует отдавать себе отчет в том, что и здесь проблема сравнения надежности элементов конструкции с различными предельными состояниями решается не лучшим образом.

Чтобы в этом убедиться, сравним области отказов трех элементов  $A, B$  и  $C$  с уравнениями предельных состояний  $g_A(y) = 0, g_B(y) = 0$  и  $g_C(y) = 0$ . Пусть эти уравнения имеют вид, показанный на рис. 3.13. Область безотказной работы  $S_A = \{y | g_A(y) \geq 0\}$  для элемента  $A$  является частью  $S_C$ . Однако индексы безопасности  $\beta_{HL}$  для всех трех элементов конструкции одинаковы:

$$\beta_{HL}(A) = \beta_{HL}(B) = \beta_{HL}(C),$$

хотя с инженерной точки зрения совершенно очевидно, что элемент  $C$  надежнее, чем  $B$ , а  $B$  надежнее, чем  $A$ .

Обобщенный индекс безопасности по Дитлевсену. Для преодоления этих трудностей Дитлевсен сформулировал набор канонических правил [3.21, 3.22], которые позволяют выдержать удовлетворительный запас безопасности, если имеются формулировка предельного состояния и информация о первых двух моментах базисных переменных; функции распределения не известны.

Из сформулированных в [3.21] правил можно заключить, что только обобщенный индекс безопасности может обеспечить требуемую сравнимость

$$\beta_D = \Phi^{-1} \left[ \int \dots \int_S \prod_{i=1}^m \varphi(y_i) dy_i \right], \quad (3.115)$$

где  $S = \{y | g(y) \geq 0\}$  — область безотказной работы;  $\varphi$  — плотность стандартного нормального распределения;  $\Phi^{-1}$  — его обратная функция;  $y_i$  — стандартизированные величины по формулам (3.91) или (3.53).

Следует подчеркнуть, что индекс  $\beta_D$  базируется исключительно на представлении, что доступна лишь информация о первых двух моментах, хотя и кажется, что с введением  $\beta_D$  делается предположение о функции распределения. Плотность

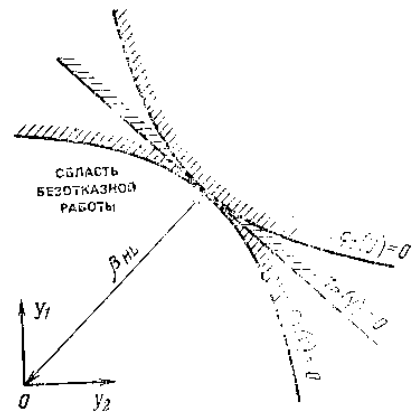


Рис. 3.13. Различия в виде областей безотказной работы  $S_A \in S_B, S_B \in S_C$  с одинаковым индексом безопасности  $\beta_{HL}$

распределения по нормальному закону  $\varphi$  служит здесь исключительно как формальное математическое средство для обобщения меры надежности в методе моментов для учета кривизны поверхности предельного состояния. Как и прежде, исходя из того, что информация об истинной функции распределения отсутствует.

В заключение укажем, что все три определения для индекса безопасности ( $\beta_C, \beta_{HL}, \beta_D$ ) идентичны в случае линейного уравнения предельного состояния  $g(x) = 0$ .

Пример 3.9. Определим для примера 3.5 обобщенный индекс безопасности  $\beta_D$  по Дитлевсену. Поскольку, как видно из рис. 3.12, область отказа выпукла и, таким образом, меньше, чем полуплоскость, образованная касательной в проектной точке, то следует ожидать, что

$$\beta_D > \beta_{HL};$$

$$\beta_D = \Phi^{-1} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left( \frac{x_1 - m_{X_1}}{\sigma_{X_1}} \right) \Phi \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{x_2 - m_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \right) dx_1 dx_2 \right] = \\ = \Phi^{-1} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left( \frac{12/x_2 - m_{X_1}}{\sigma_{X_1}} \right) \Phi \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{x_2 - m_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \right) dx_2 \right].$$

Численное интегрирование дает

$$\beta_D = \Phi^{-1}(0,996) = 2,650.$$

**Теория надежности 1-го порядка.** Вновь предположим, что имеется информация о типах распределений базисных переменных или она может быть достоверно оценена.

Существенный недостаток метода моментов заключается именно в том, что возможная информация о типах распределения, которая может быть получена не обязательно статистически, но и из чисто теоретических соображений, в этом методе не используется и ею пренебрегают. Кроме того, в методах оптимизации надежности, которые будут вкратце рассмотрены далее, оперируют не с индексом безопасности, а именно с вероятностями отказов.

Ниже рассматриваются приближенные способы оценки оперативной вероятности отказа. Сначала обсуждается случай независимых  $X_i$  и для него даются различные пути решения. Развитие этих способов связано с именами Линда, Раквица и Фислера [3.20, 3.23, 3.24 и 3.25].

Для нормально распределенных базисных переменных при линейном уравнении предельного состояния получается очень простое решение, причем наиболее важная часть оценки надежности сводится к определению кратчайшего расстояния от начала координат до поверхности предельного состояния в стандартизованном пространстве.

На этом решении основывается затем теория надежности 1-го порядка как метод приближенного решения для общего нелинейного случая при иных законах распределений базисных переменных. Для этого базисные переменные  $X_i$  переводятся в стандартизованную форму  $Y_i$  с нормальным распределением. При этом преобразовании вероятности в соответствующих друг другу точках должны быть одинаковы,

так что для всех базисных переменных и для всех точек должно соблюдаться условие

$$F_{X_i}(x_i) = \Phi(y_i). \quad (3.116)$$

Отсюда следуют соотношения преобразования:

$$x_i = F_{X_i}^{-1}[\Phi(y_i)]$$

или

$$y_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)]; \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (3.117)$$

где  $F_{X_i}$  — функции распределения базисных переменных  $X_i$ ;  $F_{X_i}^{-1}$  — функции, обратные к ним;  $\Phi^{-1}$  — обратная функция стандартизованного нормального распределения.

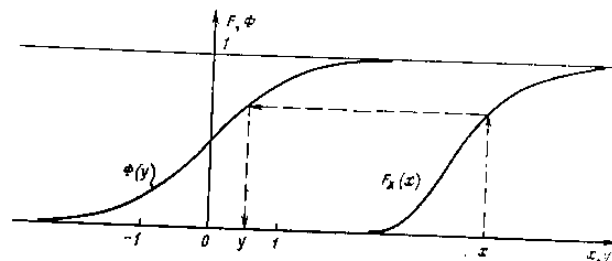


Рис. 3.14. Преобразование  $y = \Phi^{-1}[F_X(x)]$

На рис. 3.14 дано преобразование по формуле (3.117), представляющее, как правило, нелинейную трансформацию, т. е. если уравнение предельного состояния  $g(x)$  линейно, то после перевода в  $y$ -пространство оно окажется нелинейным. Только в случае нормальных переменных  $X_i$  выражение (3.117) переходит в частный случай линейного [см. формулу (3.91)].

В  $y$ -пространстве все случайные величины независимы, стандартизованы и имеют нормальное распределение с  $m_i = 0$  и  $\sigma_i = 1$ . Подставляя зависимости (3.117) в функцию предельного состояния  $g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ , получаем:

$$g\{F_{X_1}^{-1}[\Phi(y_1)], \dots, F_{X_m}^{-1}[\Phi(y_m)]\} = 0$$

или

$$h(y) = h(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0. \quad (3.118)$$

$h(y) = 0$  представляет собой гиперповерхность в  $m$ -мерном  $y$ -пространстве, которая делит это пространство на об-

ласти отказа и безотказной работы. Вероятность отказа представляется интегралом от  $m$ -мерной плотности распределения по области отказа.

Приближенность теории надежности 1-го порядка состоит в том, что поверхность предельного состояния заменяется плоскостью, касающейся этой поверхности в проектной точке  $y^*$ , т. е. точке на  $h(y) = 0$ , расположенной наиболее близко к началу координат и имеющей наибольшую плотность распределения.

Интегрирование по области отказа  $\{y | h(y) < 0\}$  заменяется интегрированием по полупространству  $\{y | l(y) < 0\}$  при

$$l(y) = h(y^*) + (y - y^*)^T N(y^*), \quad (3.119)$$

где  $N(y^*)$  — в соответствии с формулой (3.97) вектор производных функций  $h(y)$  в точке  $y^*$ .

Выражение (3.119) может быть представлено в виде:

$$l(y) = h(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*) + \sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*) \frac{\partial h}{\partial y_i} \Big|_{y=y^*}. \quad (3.120)$$

При этом предполагается, что уравнение предельного состояния  $h$  в окрестности проектной точки непрерывно и по меньшей мере единожды дифференцируемо.

Уравнение касательной плоскости  $l(y) = 0$  получается разложением  $h(y)$  в ряд Тейлора с учетом только линейных членов (рис. 3.15). Преобразование в форму  $l(y) = \alpha^T y + \delta = 0$  ведется по аналогии с выражениями (3.100) и (3.101):

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= N(y^*) / [N^T(y^*) N(y^*)]^{1/2}; \\ \delta &= [h(y^*) - y^{*T} N(y^*)] / [N^T(y^*) N(y^*)]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.121)$$

Учитывая, что  $y^* = -\alpha\delta$ , можно записать наименьшее расстояние в виде:

$$\delta = (y^{*T} y^*)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^{*2}}. \quad (3.122)$$

Это расстояние вычисляют, решая задачу нахождения экстремума с дополнительным условием,

$$\delta = \min \{(y^T y)^{1/2} | h(y) = 0\},$$

или

$$\delta = \min \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2} \mid h(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \right\}. \quad (3.123)$$

В этой постановке  $\delta$  всегда положительно и дает модуль

индекса безопасности. Сам индекс получается, как и прежде, в виде

$$\beta = \begin{cases} \delta, & \text{если } h(0) > 0 \\ -\delta, & \text{если } h(0) < 0 \end{cases}$$

В отличие от метода моментов можно получить приближенные значения вероятности отказа. Для полупространства  $l(y) < 0$  с линейризованным уравнением предельного состояния справедливо выражение (3.37):  $P_f \approx \Phi(-\beta)$ . Для исходной области отказа  $h(y) < 0$  или  $g(x) < 0$  это выражение приближенно:

$$P_f \approx \Phi(-\beta). \quad (3.124)$$

Приближение достаточно хорошее, так как, с одной стороны, плотность стандартизованного нормального распре-

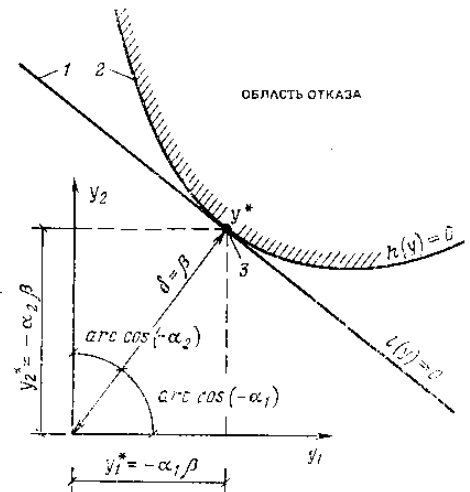


Рис. 3.15. Линейризация функции предельного состояния проектной точке

1 — линейризованное предельное состояние; 2 — предельное состояние; 3 — проектная точка

деления с удалением от начала координат быстро падает, а с другой стороны, уравнения предельных состояний для большинства практических задач достаточно гладкие.

Таким образом, приближенное определение оперативной вероятности отказа свелось к определению кратчайшего расстояния между началом координат и поверхностью предельного состояния в пространстве преобразованных по выражению (3.117) случайных величин.

Далее будут рассмотрены различные численные способы определения индекса безопасности  $\beta$  и проектной точки.

Приведем более обстоятельные соображения о связи между индексом безопасности и вероятностью отказа.

Если область отказа в  $y$ -пространстве  $V = \{y | h(y) < 0\}$  в окрестности проектной точки выпукла, то  $\Phi(-\beta)$  представляет собой верхнюю оценку  $P_f$ , а если выпуклой является область безотказной работы  $S = \{y | h(y) \geq 0\}$ , то нижнюю оценку. Это очевидное соображение иллюстрирует рис. 3.16 для двумерного случая.

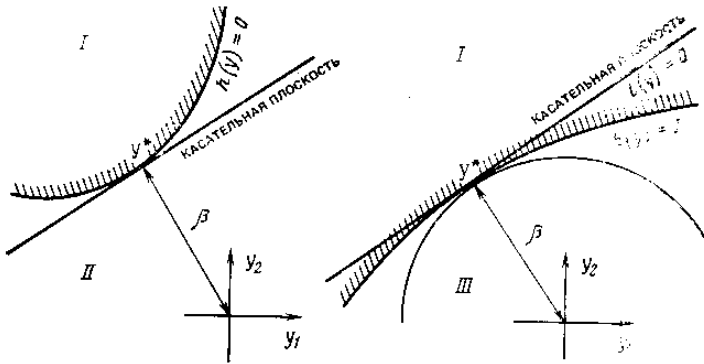


Рис. 3.16. Оценка вероятности отказа в двумерном случае ( $m=2$ )  
 I — область отказа; II — выпуклая область отказа; III — выпуклая область безотказной работы

Нижняя оценка может быть получена и другим путем. Для этого поверхность предельного состояния аппроксимируется  $m$ -мерным шаром радиусом  $\beta$ . При этом очевидно, что область отказа переоценивается. Определение вероятности в таком шаре с центром в начале координат и радиусом  $\beta$  проводится с помощью функции  $F_{\chi^2, m}(\beta^2)$  распределения  $\chi^2$  с степенями свободы в точке  $\beta^2$  (где  $m$  — число случайных величин). Доказательство этого утверждения можно найти, например, в работе [2.1] и в таблицах для распределения  $\chi^2$  в работе [2.3].

Итак, получены следующие оценки:

выпуклая область отказа

$$0 < P_f < \Phi(-\beta); \quad (3.125)$$

выпуклая область безопасной работы

$$\Phi(-\beta) < P_f < 1 - F_{\chi^2, m}(\beta^2). \quad (3.126)$$

Чаще однако ни одна из обеих областей не является выпуклой; в таком случае вышеприведенные оценки не действительны. Кроме того, в практических задачах с  $m$ -переменными сложно определяются выпуклость области. С другой стороны, уравнение  $h(y) = 0$  часто бывает достаточно близким к плоскости, так что выражение (3.124) вполне применимо для практических целей в качестве приближения.

Способ итераций в пространстве стандартизованных распределенных по нормальному закону случайных чисел. Разработанный в методе моментов итерационный прием в  $y$ -пространстве может быть использован и для этого общего случая, если вместо выражения (3.94) ввести более общее преобразование  $x_i = F_{\chi_i}^{-1} \times [\Phi(y_i)]$ . В этом алгоритме встречаются производные  $\partial h / \partial y_i$  (где  $i = 1, 2, \dots, m$ ). С учетом формулы (3.117) и правила дифференцирования обратных функций получаем для  $i$ -той компоненты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(y_i)}{\partial y_i} &= \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \times \\ &\times \frac{\partial (F_{\chi_i}^{-1}[\Phi(y_i)])}{\partial y_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{1}{\partial F_{\chi_i}(x) / \partial x_i} \times \\ &\times \frac{\partial \Phi(y_i)}{\partial y_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\Phi(y_i)}{f_{\chi_i}(x_i)}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Первый множитель представляет собой производную от уравнения предельного состояния в исходном пространстве и определяется, как правило, просто. Второй множитель зависит только от типа распределения базисных переменных.

В данном случае также заменяют производные конечными разностями по выражению (3.107) или (3.108) при использовании в расчетах ЭВМ.

Итерационный процесс описывается следующим образом.

1. Выбирается начальный вектор  $y^{(0)}$  в  $y$ -пространстве.
2. Вычисляются компоненты соответствующего вектора  $x^{(0)}$  в  $x$ -пространстве:  $x_i^{(0)} = F_{\chi_i}^{-1}[\Phi(y_i^{(0)})]$ .
3. Вычисляются значения уравнения предельного состояния и его производной в точке  $y^{(0)}$ :

$$h(y^{(0)}) = g(x^{(0)}) = g\{F_{\chi_1}^{-1}[\Phi(y_1)], \dots, F_{\chi_m}^{-1}[\Phi(y_m)]\};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=y^{(0)}} &= \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x^{(0)}} \times \\ &\times \frac{\Phi(y_i^{(0)})}{f_{\chi_i}(x_i^{(0)})}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

4. Вычисляется вектор следующего приближения  $y^{(1)}$  по формуле

$$y_i^{(1)} = \frac{\left. \frac{\partial h}{\partial y_i} \right|_{y=y^{(0)}}}{\sum_{j=1}^m \left( \left. \frac{\partial h}{\partial y_j} \right|_{y=y^{(0)}} \right)^2} \left[ \sum_{j=1}^m y_j^{(0)} \left. \frac{\partial h}{\partial y_j} \right|_{y=y^{(0)}} - h(y^{(0)}) \right]$$

5. Повторяются шаги 2—4 до тех пор, пока не будет достигнута сходимость и  $y^{(k+1)} \approx y^{(k)}$ . Тогда  $y^{(k+1)} = y^*$  представляет собой искомую проектную точку и

$$\delta = (y^{*T} y)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^{*2}}; \beta = \begin{cases} \delta & \text{при } h^{(0)} > 0 \\ -\delta & \text{при } h^{(0)} < 0. \end{cases}$$

6. Определяется приближенное значение оперативной вероятности отказа  $P_f \approx \Phi(-\beta)$ .

На выбор начального вектора не накладывается никаких требований. Часто нулевой вектор  $y^{(0)} = 0$  вполне достаточен как первое приближение. Сходимость может заметно различаться для разных задач. Она тем лучше, чем больше подобия между распределениями  $X_i$  и нормальным распределением и чем более гладкой является поверхность предельного состояния. Распределения с дискретными вероятностями в нулевой точке, а также со скачкообразной функцией распределения могут вместе с нелинейностью уравнения предельного состояния привести к расхождению или очень плохой сходимости итерационного процесса. Если встречается маятниковое движение, то и здесь половинный шаг по выражению (3.106) может существенно улучшить сходимость.

В сложных проблемах может иметь место множественность решений. Здесь может помочь систематическое изменение начальной точки  $y^{(0)}$  и получение за счет этого представления о множестве решений. Для определения уровня надежности выбирается наименьшее значение  $\beta$ . Оно представляет собой верхнюю оценку обобщенного индекса безопасности  $\beta_V$  по выражению (3.139).

**Пример 3.10.** Решается задача для консольной балки из примера 3.1 на основе теории надежности 1-го порядка описанной выше методом итераций. В качестве начального приближения выбирается нулевой вектор:

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \Phi(y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix};$$

$$\varphi(y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,3989 \\ 0,3989 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий вектор в  $x$ -пространстве:

$$x_1^{(0)} = F_{X_1}^{-1}[\Phi(y_1^{(0)})] = x_{01} + \exp\{m_U + \sigma_U \Phi^{-1} \times \\ \times [\Phi(y_1^{(0)})]\} = 16 \cdot 10^4 + \exp\{11,534\} = 26,213 \cdot 10^4;$$

$$x_2^{(0)} = F_{X_2}^{-1}[\Phi(y_2^{(0)})] = u - \frac{1}{a} \{\ln[-\ln \Phi(y_2^{(0)})]\} = \\ = 17,1 - \frac{1}{0,6413} \ln(-\ln 0,5) = 17,672.$$

Плотности распределения в точке  $x^{(0)}$

$$f_{X_1}(x_1^{(0)}) = \frac{1}{\sigma_U (x_1^{(0)} - x_{01})} \varphi \left[ \frac{\ln(x_1^{(0)} - x_{01}) - m_U}{\sigma_U} \right] = \\ = 1,664 \cdot 10^{-5};$$

$$f_{X_2}(x_2^{(0)}) = a \exp\{-a(x_2^{(0)} - u) - \exp[-a(x_2^{(0)} - u)]\} = \\ = 0,2222.$$

Значения уравнения предельного состояния в точке  $x^{(0)}$  или  $y^{(0)}$  при упругом моменте сопротивления

$$h(y^{(0)}) = g(x^{(0)}) = W_{c1} x_1^{(0)} - l x_2^{(0)} = 20,752.$$

Производные от функции предельного состояния:

$$\left. \frac{\partial h(y)}{\partial y_1} \right|_{y=y^{(0)}} = \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \right|_{x=x^{(0)}} \frac{\varphi(y_1^{(0)})}{f_{X_1}(x_1^{(0)})} = \\ = 2,14 \cdot 10^{-4} \frac{0,3989}{1,664 \cdot 10^{-5}} = 5,130;$$

$$\left. \frac{\partial h(y)}{\partial y_2} \right|_{y=y^{(0)}} = \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} \right|_{x=x^{(0)}} \frac{\varphi(y_2^{(0)})}{f_{X_2}(x_2^{(0)})} = \\ = -2 \frac{0,3989}{0,2222} = -3,590.$$

Приближение 1-го шага

$$y_1^{(1)} = \frac{\partial h / \partial y_1}{(\partial h / \partial y_1)^2 + (\partial h / \partial y_2)^2} \left[ \sum_{j=1}^m y_j^{(0)} \frac{\partial h}{\partial y_j} - h(y^{(0)}) \right] = \\ = \frac{5,130}{5,130^2 + 3,590^2} (-20,752) = -2,715;$$

$$y_2^{(1)} = \frac{-3,590}{5,130^2 + 3,590^2} (-20,752) = 1,9.$$

Первое приближение для расстояния от начала координат до проектной точки

$$\sigma^{(1)} = \sqrt{2,715^2 + 1,900^2} = 3,314.$$

На этом заканчивается первая итерация. Расчет повторяется с новым вектором  $y^{(1)}$ , и цикл продолжается, пока не совпадут достаточно точно две последовательные точки. Результаты вычислений приведены в таблице. После четырех шагов значения индексы безопасности совпадают по четырем значащим цифрам.

Поскольку  $h(0) = 20,752$  положительно, имеем  $\beta = +\delta = 2,842$ . По выражению (3.124) находим приближенное значение вероятности начала фибровой текучести в заделке:

$$P_f = \Phi(-2,842) = 2 \cdot 242 \cdot 10^{-3},$$

что хорошо согласуется с точным значением  $P_f = 2 \cdot 131 \cdot 10^{-3}$ , полученным в примере 3.1 численным интегрированием.

k	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$ , кН/м <sup>2</sup>	$x_2^{(k)}$ , кН	$d_1^{(k)}$	$d_2^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	$26,21 \cdot 10^4$	17,67	—	—	0
1	-2,715	1,900	$21,40 \cdot 10^4$	22,61	0,193	-0,5733	3,314
2	-0,986	2,627	$24,10 \cdot 10^4$	25,59	0,3513	-0,9363	2,806
3	-1,151	2,597	$23,79 \cdot 10^4$	25,46	0,5043	-0,9142	2,841
4	-1,123	2,610	$23,85 \cdot 10^4$	25,52	0,3953	-0,9185	2,842
5	-1,126	2,609	$23,84 \cdot 10^4$	25,51	0,3962	0,9182	2,842

Аналогичный расчет для предельного состояния с образованием пластического шарнира при  $W_{pl} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$  дает:  $y_1^* = -1,311$ ;  $y_2^* = 3,368$ ;  $\beta = 3,614$ ;  $P_f = 1,508 \cdot 10^{-4}$ . Точное значение вероятности отказа  $P_f = 1,398 \cdot 10^{-4}$ .

**Алгоритм Раковца—Фислера.** В этом подходе также применяется переход в стандартизованное пространство. При этом случайные величины, распределенные не по нормальному закону, аппроксимируются нормальными распределениями так, чтобы оба распределения в окрестности проектной точки по возможности совпадали.

Хорошая аппроксимация достигается в том случае, если в  $x^*$  совпадают как функции, так и плотности распределения, т. е. если

$$\left. \begin{aligned} f_{X_i}(x_i^*) &= \frac{1}{\sigma_{X_i}^*} \varphi\left(\frac{x_i^* - m_{X_i}^*}{\sigma_{X_i}^*}\right); \\ F_{X_i}(x_i^*) &= \Phi\left(\frac{x_i^* - m_{X_i}^*}{\sigma_{X_i}^*}\right), \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

где  $m_{X_i}$  —  $\sigma_{X_i}$  — среднее и стандартное отклонения аппроксимирующего нормального распределения.

Решение относительно этих величин дает:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{X_i}^* &= \frac{1}{f_{X_i}(x_i^*)} \varphi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\}; \\ m_{X_i}^* &= x_i^* - \sigma_{X_i}^* \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.129)$$

Эти величины зависят от положения проектной точки  $x^*$ . На рис. 3.17, где для примера приведена подобная аппроксимация, видно, что это приближение в области правого «хвоста»

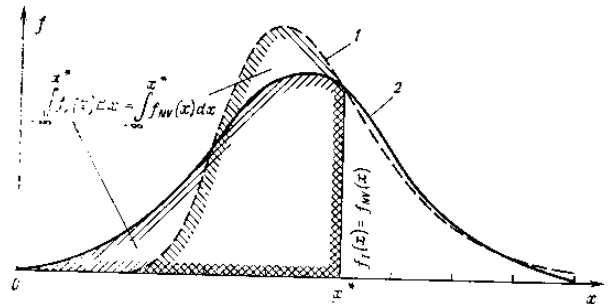


Рис. 3.17. Приближение распределения экстремальных значений с помощью нормального распределения так, что в точке  $x^*$  совпадают плотности и функции распределения

1 — распределение экстремальных значений типа I,  $f_1(x)$ ; 2 — нормальное распределение,  $f_{NV}(x)$

ста» достаточно хорошее, хотя выбранная здесь точка  $x^*$  относительно близка к среднему значению. Для малых вероятностей отказа точка  $x^*$  лежит в области хвоста, и в большинстве случаев достигается довольно хорошее приближение.

Таким образом, предлагается следующий итерационный процесс:

1. Выбирается начальный вектор  $x^{(0)}$  в  $x$ -пространстве. Подходящим является вектор математических ожиданий или, лучше, вектор расчетных значений по нормам.

2. Все случайные величины, распределенные не по нормальному закону, аппроксимируются нормальным распределением так, что в точке  $x^{(0)}$  совпадают функции и плотности распределений. Аппроксимирующее нормальное распределение имеет стандартное отклонение.

$$\sigma_{X_i}^{*(0)} = \frac{1}{f_{X_i}(x_i^{(0)})} \varphi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^{(0)})]\}$$

в среднем

$$m_{x_i}^{*(0)} = x_i^{(0)} - \sigma_{x_i}^{*(0)} \Phi^{-1} [F_{x_i}(x_i^{(0)})], \quad i=1, 2, \dots, m.$$

3. Вычисляется вектор  $y^{(0)}$ , соответствующий  $x^{(0)}$ .

$$y_i^{(0)} = \frac{x_i^{(0)} - m_{x_i}^{*(0)}}{\sigma_{x_i}^{*(0)}}, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

4. Вычисляются значения уравнения предельного состояния и его производных в точке  $h(y^{(0)}) = g(x^{(0)})$ :

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y_i} \right|_{y=y^{(0)}} = \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=x^{(0)}} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} = \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=x^{(0)}} \sigma_{x_i}^{*(0)}.$$

5. Определяются коэффициенты уравнения касательной гиперплоскости к  $h(y) = 0$  в точке  $y^{(0)}$ :

$$\alpha_i^{(0)} = \frac{\left. \frac{\partial h}{\partial y_i} \right|_{y=y^{(0)}}}{\left[ \sum_{j=1}^m \left( \left. \frac{\partial h}{\partial y_j} \right|_{y=y^{(0)}} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad i=1, 2, \dots, m;$$

$$\delta_i^{(0)} = \frac{h(y^{(0)}) - \sum_{j=1}^m y_j^{(0)} \left. \frac{\partial h}{\partial y_j} \right|_{y=y^{(0)}}}{\left[ \sum_{j=1}^m \left( \left. \frac{\partial h}{\partial y_j} \right|_{y=y^{(0)}} \right)^2 \right]^{1/2}}.$$

6. Новое приближение для проектной точки в  $y$ -пространстве следует из  $y_i^{(1)} = -\alpha_i^{(0)} \delta^{(0)}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ .

7. Обратное преобразование в  $x$ -пространство

$$x_i^{(1)} = m_{x_i}^{*(0)} + y_i^{(1)} \sigma_{x_i}^{*(0)}, \quad i=1, 2, \dots, m$$

даст начальную точку для следующего шага итераций.

8. Шаги 2—7 повторяются, пока не будет достигнута сходимость.

Последовательность  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  сходится для задач с распределениями, не сильно отличающимися от нормального, и с достаточно гладкими поверхностями предельных состояний в окрестности проектной точки  $x^*$ .

Преимуществом этого алгоритма является то, что он может быть распространен на проблему сочетаний нагрузок в виде случайных последовательностей с различными интервалами времени [3.28, 3.29]. Кроме того, здесь обходится применением обратной функции распределения  $F_{x_i}^{-1}$ , которая для

произвольного закона распределения не может быть найдена в замкнутом виде.

*Пример 3.11.* Для сравнения вновь вернемся к примеру 3.1. За начальный вектор в исходном пространстве примем вектор математических ожиданий

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 265\,000 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$F_{x_1}(x_1^{(0)}) = \Phi \left[ \frac{\ln(265\,000 - 160\,000) - 11,534}{0,2348} \right] = \Phi(0,1180) = 0,5470;$$

$$f_{x_1}(x_1^{(0)}) = \frac{1}{(265\,000 - 160\,000) \cdot 0,2348} \varphi(0,1180) = 1,607 \cdot 10^{-5}$$

(см. табл. 5 прил. 11);

$$F_{x_2}(x_2^{(0)}) = \exp\{-\exp[-a(x_2^{(0)} - u)]\} = \exp\{-\exp[0,6413(18 - 17,1)]\} = 0,5704;$$

$$f_{x_2}(x_2^{(0)}) = a \exp\{-a(x_2^{(0)} - u) - \exp[-a(x_2^{(0)} - u)]\} = 0,2054$$

(см. табл. 6 прил. 11);

$$\sigma_{x_1}^{*(0)} = \frac{1}{1,607 \cdot 10^{-5}} \varphi[\Phi^{-1}(0,5470)] = 24\,656;$$

$$m_{x_1}^{*(0)} = 265\,000 - 24\,656 \Phi^{-1}(0,5470) = 262\,105;$$

$$\sigma_{x_2}^{*(0)} = \frac{1}{0,2054} \varphi[\Phi^{-1}(0,5704)] = 1,9124;$$

$$m_{x_2}^{*(0)} = 18 - 1,9124 \Phi^{-1}(0,5704) = 17,662;$$

$$y_1^{(0)} = (265\,000 - 262\,105) / 24\,656 = 0,1174;$$

$$y_2^{(0)} = (18 - 17,662) / 1,9124 = 0,1767;$$

$$h(y^{(0)}) = g(x^{(0)}) = W_{r1} x_1^{(0)} / t x_2^{(0)} = 20,710;$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y_1} \right|_{y=y^{(0)}} = \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{x=x^{(0)}} \sigma_{x_2}^{*(0)} = W_{r1} \sigma_{x_2}^{*(0)} = 5,2764;$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y_2} \right|_{y=y^{(0)}} = \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{x=x^{(0)}} \sigma_{x_1}^{*(0)} = -t \sigma_{x_1}^{*(0)} = -3,8248;$$

$$\alpha_1^{(0)} = 5,2764 / \sqrt{5,2764^2 + 3,8248^2} = 0,8097;$$

$$\alpha_2^{(0)} = -3,8248 / \sqrt{5,2764^2 + 3,8248^2} = -0,5869;$$

$$\delta^{(0)} = \frac{20,710 - 0,1174 \cdot 5,2764 + 0,1767 \cdot 3,8248}{\sqrt{5,2764^2 + 3,8248^2}} = 3,187;$$

$$\begin{aligned}
 y_1^{(1)} &= -0,8047 \cdot 3,187 = -2,581; \\
 y_2^{(1)} &= 0,5869 \cdot 3,187 = 1,870; \\
 x_1^{(1)} &= 262 \cdot 105 - 2,581 \cdot 24 \cdot 656 = 198 \cdot 468; \\
 x_2^{(1)} &= 17,662 + 1,870 \cdot 1,9124 = 21,238.
 \end{aligned}$$

На этом заканчивается первый шаг итераций. Дальнейшие вычисления дают нижеприведенные значения и приводят к тому же результату, что и в примере 3.10.

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	$26,50 \cdot 10^4$	18,00	3,187
1	$19,85 \cdot 10^4$	21,24	2,656
2	$22,89 \cdot 10^4$	24,50	2,836
3	$23,87 \cdot 10^4$	25,54	2,842
4	$23,84 \cdot 10^4$	25,51	2,842

*Задача определения экстремума с дополнительным условием.* В соответствии с выражением (3.123) рассматриваемая проблема может трактоваться как задача на отыскание экстремума с дополнительным условием. Разыскивается минимум функции  $(\sum_{i=1}^m y_i^2)^{1/2}$  при условии, что  $y_i$  подчиняются уравнению предельного состояния  $h(y_1, \dots, y_m)$  в  $y$ -пространстве.

Положение минимума не изменится, но проблема упростится, если разыскивать минимум  $\delta^2$ , т. е. рассматривать задачу:

$$\delta^2 = \min \left\{ \sum_{i=1}^m y_i^2 \mid h(y_1, \dots, y_m) = 0 \right\};$$

$$\delta^2 = \min \left\{ \sum_{i=1}^m y_i^2 \mid g(F_{x_1}^{-1}[\Phi(y_1)], \dots, F_{x_m}^{-1}[\Phi(y_m)]) = 0 \right\}. \quad (3.130)$$

Эта задача может рассматриваться и в исходном пространстве. С учетом выражения (3.117) можно записать:

$$\delta^2 = \min \left\{ \sum_{i=1}^m (\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)])^2 \mid g(x_1, \dots, x_m) = 0 \right\}. \quad (3.131)$$

В первом случае простой вид имеет целевая функция, в то время как дополнительное условие более сложно. Во втором варианте ситуация обратна. Ниже рассматривается первый вариант.

Экстремальные задачи с дополнительным условием можно свести к задачам на безусловный экстремум введением функ-

ций Лагранжа [2.8, 3.30]. Для нашей проблемы функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_{i=1}^m y_i^2 + \lambda h(y_1, \dots, y_m), \quad (3.132)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа.

Необходимое условие существования относительного экстремума

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial y_i} &= 0, \quad i=1, 2, \dots, m; \\
 \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует система из  $m+1$  уравнений:

$$\begin{aligned}
 2y_i &= \lambda \frac{\partial h}{\partial y_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, m; \\
 h(y_1, \dots, y_m) &= 0.
 \end{aligned}$$

Целесообразно исключить отсюда  $\lambda$ . Из  $m$ -го уравнения следует:

$$\lambda = \frac{2y_m}{\partial h / \partial y_m}.$$

После чего система из  $m$  нелинейных уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \psi_i &= y_i - y_m \frac{\partial h / \partial y_i}{\partial h / \partial y_m} = 0, \quad i=1, 2, \dots, m-1; \\
 \psi_m &= h(y_1, \dots, y_m) = 0.
 \end{aligned} \quad (3.133)$$

Для решения этой системы уравнений вводится вспомогательная функция

$$\begin{aligned}
 \Psi(y_1, \dots, y_m) &= \sum_{i=1}^m \psi_i^2 = h^2(y_1, \dots, y_m) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{m-1} \left( y_i - y_m \frac{\partial h / \partial y_i}{\partial h / \partial y_m} \right)^2.
 \end{aligned} \quad (3.134)$$

Очевидно, что каждой точке нулевого минимума функции  $\Psi$  соответствует решение системы (3.133). Таким образом, проблема сведена к отысканию точек нулевого минимума вспомогательной функции.

Для решения можно использовать различные численные приемы определения безусловного относительного экстремума функции с многими переменными. Приведем в качестве при-



мера простую формулу для итерационного процесса метода градиентов:

$$y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} \frac{\Psi(y^{(k)})}{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \Psi(y^{(k)})}{\partial y_j} \right)^2} \times \frac{\partial \Psi(y^{(k)})}{\partial y_i}, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (3.135)$$

Вывод (3.135), а также описание иных, более сложных, но и быстрее сходящихся итерационных процессов можно найти в работе Березина и Жидкова [3.31]; процессы, дающие хорошую сходимость, — в работах Флетчера, Пауэлла и Ривса [3.32, 3.33]; можно использовать стандартные программы для ЭВМ, имеющиеся в большинстве вычислительных центров [3.34].

Последовательность  $y^{(k)}$  сходится, как правило, к искомой проектной точке. Когда сходимость достигнута, индекс безопасности вычисляется по формуле

$$\beta = \begin{cases} +(\sum_i y_i^{*2})^{1/2} & \text{при } h(0) > 0 \\ -(\sum_i y_i^{*2})^{1/2} & \text{при } h(0) < 0 \end{cases}$$

а коэффициенты чувствительности — из выражения  $a_i = -y_i/\beta$  (где  $i=1, 2, \dots, m$ ).

Другую возможность решения системы (3.133) дает метод Ньютона. Пусть для системы нелинейных уравнений

$$\psi_i(y) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

известно приближенное решение  $y^*$ . По методу Ньютона [3.31, 3.35] следующее приближение получается по зависимости

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - F^{-1}(y^{(k)}) \Psi(y^{(k)}). \quad (3.136)$$

Здесь

$$F(y^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{y=y^{(k)}}$$

представляет собой матрицу частных производных в точке  $y^{(k)}$ .

Чтобы избежать необходимости обращения матрицы, целесообразно преобразовать выражение (3.136) так, чтобы на каждом шаге итераций решать линейную систему уравнений, определяющую вектор поправок

$$F(y^{(k)}) \Delta y^{(k)} = \Psi(y^{(k)}). \quad (3.137)$$

При хорошем начальном приближении метод Ньютона сходится весьма быстро, и требуется малое число шагов, чтобы достичь требуемой точности.

*Пример 3.12.* Вновь обратимся к примеру 3.1, выбрав в качестве начального приближения вектор  $y^{(0)} = 0$ .

Используя полученные в примере 3.10 значения функции и ее производных, вычисляем:

$$\psi_1(0) = 0; \quad \psi_2(0) = h(0) = 20,752;$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} = 1; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} = -\frac{\partial h / \partial h_1}{\partial h / \partial y_2} = \frac{5,130}{3,590} = 1,429;$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} = \frac{\partial h}{\partial y_1} = 5,130; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} = \frac{\partial h}{\partial y_2} = -3,590.$$

Из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,429 \\ 5,130 & -3,590 \end{pmatrix} \Delta y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20,752 \end{pmatrix}$$

с решением

$$\Delta y^{(1)} = \begin{pmatrix} 2,715 \\ -1,900 \end{pmatrix} \text{ следует } y^{(1)} = 0 - \Delta y^{(1)} = \begin{pmatrix} -2,715 \\ 1,900 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшие шаги итераций приведены в таблице

$k$	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0
1	-2,715	1,900	3,314
2	-1,077	2,593	2,808
3	-1,125	2,609	2,841
4	-1,126	2,609	2,842

Учет кривизны поверхности предельного состояния в проектной точке. Оценка вероятности отказа по выражению (3.124), основанная на линеаризации функции предельного состояния в проектной точке, вполне достаточна для инженерных задач. Только в случае, если  $g(x) = 0$  сильно искривлена, или если распределения базисных переменных существенно отличаются от нормального распределения и не имеют колоколообразной формы, или если требуются очень точные оцен-

ки для высокого уровня надежности, может оказаться целесообразным использовать приближения более высокого порядка.

В развитии подходов теории надежности 1-го порядка откажемся от приближения функции предельного состояния касательной гиперплоскостью по выражению (3.120) или гиперсферами, а учтем более точно пространственную кривизну поверхности предельного состояния  $h(y)=0$  в проектной точке в оценке вероятности отказа. Для этого в разложении Тейлора учтем и квадратичные члены:

$$h(y) \approx h(y^*) + \sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*) \left. \frac{\partial h}{\partial y_i} \right|_{y^*} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i - y_i^*)^2 \left. \frac{\partial^2 h}{\partial y_i^2} \right|_{y^*} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (y_i - y_i^*) \times (y_j - y_j^*) \left. \frac{\partial^2 h}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{y^*}. \quad (3.138)$$

Таким образом, вторые производные функции  $h(y)=0$  в точке  $y^*$  вводятся как дополнительная информация в оценку вероятности отказа. При этом предполагается, что  $h(y)$  является по крайней мере дважды дифференцируемой функцией.

В таком случае говорят о теории надежности 2-го порядка. Методы определения вероятности отказа в области отказа, ограниченной поверхностью 2-го порядка, были развиты Фислером, Нойманом и Раквицем [3.36, 3.37]. Было исследовано применение параболоидов, гиперболоидов вращения и эллипсоидов вращения. Рассматривался и общий случай квадратичных форм без симметрии вращения. Обсуждение этих методов выходит за рамки книги.

**Индекс безопасности как мера надежности.** Вероятность отказа в оценке безопасности сооружения является весьма чувствительной величиной. Она меняется, как правило, на порядок быстрее, чем размеры поперечного сечения или другие проектные параметры. Это можно видеть в примере 3.1, в котором уменьшение момента сопротивления введенным множителем 0,856 привело к увеличению вероятности отказа более чем в 15 раз. Вероятность отказа не может служить мерой надежности, она есть мера ненадежности сооружения. При обычных в строительстве требованиях она является чрезвычайно малым числом.

Все это свойства, которые не встречаются у традиционных величин и с которыми имеет дело строитель или проектировщик. Это обстоятельство может отрицательно действовать и на восприятие концепций теории надежности в строительной практике.

В поисках более подходящей меры безопасности сооружения в рамках метода моментов был введен индекс безопасности, который не обнаруживает вышеупомянутых неблагоприятных свойств. Поэтому целесообразно именно индекс безопасности рассматривать как меру надежности, даже если есть информация о распределениях базисных переменных и возможно вычисление вероятности отказа.

Возможные изменения проектных параметров и индекса безопасности являются величинами одного порядка. В примере 3.10 изменение момента сопротивления на множитель 0,856 вызвало изменение индекса безопасности на множитель 0,786.

До тех пор пока граница области отказа линейна, абсолютное значение индекса безопасности равно кратчайшему расстоянию между  $y=0$  и  $h(y)=0$ , а выражение (3.37)  $P_f = \Phi(-\beta)$  связывает между собой обе меры безопасности.

Но если  $h(y)$  сильно искривлена и можно подходящим способом (интегрированием в замкнутом виде, применением теории надежности 2-го порядка или метода Монте-Карло) точно оценить величину вероятности отказа, то желательно обобщить понятие индекса безопасности как меры надежности так, чтобы он охватывал и эту дополнительную информацию о вероятности отказа.

С этой целью определим обобщенный индекс безопасности

$$\beta_V = -\Phi^{-1}(P_f) = -\Phi^{-1} \left[ \int_V f_X(x) dx \right] = \Phi^{-1} \left[ \int_S f_X(x) dx \right], \quad (3.139)$$

который удовлетворяет уравнению (3.37), но в случае искривленной поверхности  $h(y)=0$  не идентичен кратчайшему расстоянию от начала координат до поверхности предельного состояния в  $y$ -пространстве. Индекс  $\beta_V$  больше, чем  $\beta$ , если область отказа выпукла, и  $\beta_V$  меньше  $\beta$ , если выпуклой является область безотказной работы (рис. 3.18).

В работе [3.36] даны таблицы отношения  $\beta_V/\beta$  в зависимости от кривизны поверхности  $h(y)$  в проектной точке и от числа  $m$  базисных переменных. Результаты получены на основе теории надежности 2-го порядка в предположении, что область отказа представляет собой параболоид вращения.

Несмотря на формальное подобие определения  $\beta_D$  по выражению (3.115) и  $\beta_V$  по формуле (3.139), между ними имеется существенное различие. В  $\beta_D$  учтены первые два момента распределения и кривизна  $h(y)=0$ , а в  $\beta_V$  дополнительно учитывается и информация о типе распределений.

В прикладных проблемах прослеживается нарастающая

тенденция использовать в качестве меры надежности в зависимости от принимаемого приближения или индекс безопасности  $\beta$ , или обобщенный индекс безопасности  $\beta_v$ . В данной книге как равноправные меры надежности рассматриваются и индекс безопасности, и вероятность отказа.

**Зависимые случайные величины.** Если базисные переменные образуют случайный вектор со случайными зави-

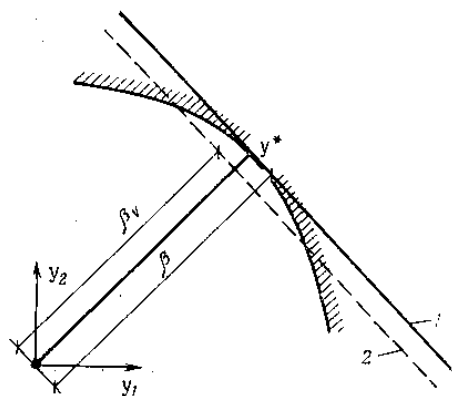


Рис. 3.18. Обобщенный индекс безопасности  $\beta(x)$  при выпуклой области безопасной работы  
1 — касательная плоскость; 2 — сдвинутая касательная плоскость

симыми компонентами, и с плотностью распределения  $f_X(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , и с функцией распределения  $F_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_m} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_X(s_1, s_2, \dots, s_m) ds_1 ds_2 \dots ds_m$ , то в

частных случаях случайных величин, соответствующих нормальному или логнормальному распределению, можно выполнить переход в пространство независимых стандартизированных нормально распределенных случайных величин с помощью простых операций, таких, как логарифмирование и параллельный перенос и поворот системы координат. Для  $X_i$ , распределенных по нормальному закону, вычисление индекса надежности выполняется точно так же, как и в методе моментов. По зависимости (3.124) можно найти вероятность отказа.

Для общего случая зависимых случайных векторов переход к  $y$ -пространству существенно сложнее. Аналогичное выражению (3.116) условие равенства вероятностей в  $x$ - и  $y$ -пространствах в этом случае имеет вид:

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_m) = \Phi(y_1) \Phi(y_2) \dots \Phi(y_m) \quad (3.140)$$

Функцию распределения  $F_X$  всегда можно представить в виде произведения условных функций распределения [2.3]:

$$F_X(x_1, \dots, x_m) = F_1(x_1) F_2(x_2|x_1) \dots F_m(x_m|x_{m-1}, \dots, x_1) \quad (3.141)$$

где

$$F_1(x_1) = P(X_1 \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s_1, \dots, s_m) ds_2 \dots ds_m$$

$$F_2(x_2|x_1) = P(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1) =$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, s_2, \dots, s_m) ds_2 ds_3 \dots ds_m}{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, s_2, \dots, s_m) ds_2 \dots ds_m}$$

$$\dots$$

$$F_m(x_m|x_{m-1}, \dots, x_1) = P(X_m \leq x_m | X_{m-1} = x_{m-1}, \dots, X_1 = x_1) =$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{x_m} f_X(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, s_m) ds_m}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, s_m) ds_m}$$

С использованием условных функций распределения преобразование можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \Phi^{-1}[F_1(x_1)]; \\ y_2 &= \Phi^{-1}[F_2(x_2|x_1)]; \\ &\vdots \\ y_m &= \Phi^{-1}[F_m(x_m|x_{m-1}, \dots, x_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.142)$$

На первом шаге переменная  $X_1$  преобразуется в стандартизированную нормально распределенную случайную величину  $Y_1$ . На втором шаге трансформируется условное распределение  $X_2$  при условии, что  $X_1 = x_1$  и т. д.

В  $y$ -пространстве имеют место те же соотношения, что и в вышерассмотренном случае независимых  $X_i$ , а следова-

тельно, могут быть использованы итерационные методы решения, основанные, например, на выражении (3.121).

Для определения входящего в это выражение вектора градиентов  $H(y)$  найдем:

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h(y)}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h(y)}{\partial y_j} \frac{1}{\varphi(y_j)} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, m. \quad (3.143)$$

Если образовать функциональную матрицу

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{1}{\varphi(y_j)} \frac{\partial F_j(x_j | x_{j-1}, \dots, x_1)}{\partial x_i},$$

то  $m$  уравнений (3.143) можно представить в виде:

$$G(x) = I^T H(y),$$

или

$$H(y) = (I^T)^{-1} G(x) = (I^{-1})^T G(x), \quad (3.144)$$

где векторы  $G(x)$  определяются по формуле (3.88), а  $H$  — по формуле (3.97);  $I$  представляет собой нижнюю треугольную матрицу.

На основе работы [3.39] можно предложить итерационный процесс, который позволяет избежать вычисления обратных функций условных распределений  $F_j(x_j | x_{j-1}, \dots, x_1)$ :

- 1) выбирается начальная точка  $x^{(0)}$ ;
- 2) вычисляется  $y^{(0)}$  по формуле (3.142);
- 3) определяется функциональная матрица  $I$  и обратная к ней  $I^{-1}$ ;
- 4) определяется значение функции предельного состояния и ее производных в точке  $y^{(0)}$

$$h(y^{(0)}) = g(x^{(0)});$$

$$H(y^{(0)}) = (I^{-1})^T G(x^{(0)});$$

- 5) вычисляется уточненное приближение проектной точки в  $y$ -пространстве

$$y^{(1)} = \frac{H(y^{(0)})}{H^T(y^{(0)}) H(y^{(0)})} [y^{(0)T} H(y^{(0)}) - h(y^{(0)})];$$

6) вычисляется уточненное приближение в  $x$ -пространстве путем приближенного обратного преобразования с матрицей  $I^{-1}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + I^{-1} (y^{(1)} - y^{(0)})$$

как новое значение начального вектора;

7) повторяются шаги 2—6, пока не будет достигнута сходимость; тогда

$$\delta = \left( \sum_c y_j^2 \right)^{1/2};$$

$$\beta = \begin{cases} \delta h'(0) > 0 \\ -\delta h'(0) < 0 \end{cases}$$

Трудности при применении этого способа несомненно заключаются в определении условных распределений  $F_j$  и их производных. Во многих случаях невозможно избежать численного определения их.

В случае зависимых базисных переменных преобразования (3.142), а в связи с этим и вычисленный индекс надежности зависят от нумерации случайных величин, так что могут существовать многие приближенные решения.

Дальнейшие детали и примеры можно найти в работах Хюенбихлера и Раквица [3.39] и Дитлевсега [3.40].

Исходным требованием применения этих общих методов является знание многомерных функций распределения базисных переменных. Поскольку в этом вопросе сегодня много проблем, применимость рассмотренных в данном разделе методов очень ограничена.

**Метод Монте-Карло.** Рассмотренные до сих пор методы решают вероятностные проблемы, сводя их к проблемам анализа, и дают затем точные или приближенные решения. Таков классический путь теории вероятностей.

Метод Монте-Карло, называемый также методом стохастической имитации или методом статистических испытаний, решает вероятностные проблемы статистическими средствами.

Ниже дается краткий обзор этого метода и обсуждаются некоторые проблемы, связанные с определением малых вероятностей. Рассмотрим путь решения на примере задачи

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_m). \quad (3.145)$$

Требуется найти случайную величину  $Z$ , являющуюся функцией заданных случайных величин  $X_1, \dots, X_m$  с функциями распределения  $F_{X_1}, \dots, F_{X_m}$ .

Важнейшим вспомогательным средством метода Монте-Карло служат случайные числа  $x_i$ , распределенные по заданному закону  $F_{X_i}$ . Эти числа представляют собой реализации случайных величин  $X_i$ . При достаточно большом объеме

выборки этих чисел распределение частот их сходится к заданному распределению вероятностей  $F_{X_i}$ . Кроме того, последовательность  $x_i$  должна быть стохастически независимой. Ниже будет показано, как вырабатываются эти случайные числа.

Для решения задачи (3.145) генерируется набор случайных чисел  $x_1, \dots, x_m$ , подставляется в формулу (3.145) и получается одно значение случайного числа  $z$  искомой случайной величины  $Z$ . Процесс продолжается до получения достаточной выборки  $Z$ , которая обрабатывается по правилам математической статистики. Строится гистограмма и определяются такие параметры, как среднее и стандартное отклонение. Если выборка достаточно велика, то частоты дают приближенное значение вероятностей.

Решение вероятностных проблем методом Монте-Карло, в особенности если есть соответствующие программы для ЭВМ, теоретически проста, но требует больших затрат и предрасполагает применение компьютера.

Можно ли этим методом можно достичь высокой точности решения. Если  $n$  — число испытаний (циклов Монте-Карло), то точность, как правило, пропорциональна  $D/\sqrt{n}$  (где  $D$  — константа). Это значит, что повышение точности на один порядок требует увеличения времени счета на два порядка. Правда, для частных случаев можно разработать способы, чтобы  $D$  было возможно мало — для повышения точности счета.

Применение метода Монте-Карло ограничивается в основном очень сложными проблемами, решение которых другими методами невозможно, а также исследованиями точности аналитических решений.

**Выработка случайных чисел.** Генерация случайных чисел, удовлетворяющих заданному распределению, является первым шагом реализации метода Монте-Карло. Устройство, которое вырабатывает случайные числа, называется генератором (датчиком) случайных чисел. Генератор работает или на физической основе (кость, рулетка), или на математической (программа для ЭВМ).

Датчик случайных чисел на математической основе вырабатывает последовательность случайных чисел с помощью рекурсивных формул. Они вычисляются по предыдущему числу или по заданному в начале вычислений начальному значению. Поскольку формализованный расчет позволяет говорить лишь с достаточной приближенностью о «случайности» полученных чисел, то эти числа называются псевдослучайными. Они имеют некоторый период, после которого выработанный датчиком ряд повторяется.

Получение распределенных по  $F_{X_i}$  случайных чисел  $x_i$  выполняется в два этапа:

1) получение случайного числа  $r$ , равномерно распределенного в интервале  $[0,1]$

$$f_R(r) = \begin{cases} 1 & 0 < r \leq 1 \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

2) преобразование равномерно распределенных случайных чисел  $r$  в искомые  $x_i$ .

Рассмотрим генерацию равномерно распределенных чисел. Датчики, которые применяются сегодня на практике, имеют следующий вид:

мультипликативный датчик

$$u_{n+1} = cu_n - M \operatorname{int} \left( \frac{cu_n}{M} \right); \quad (3.146)$$

аддитивный датчик

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} - M \operatorname{int} \left( \frac{u_n + u_{n-1}}{M} \right); \quad (3.147)$$

смешанный датчик

$$u_{n+1} = au_n + b - M \operatorname{int} \left( \frac{au_n + b}{M} \right), \quad (3.148)$$

при этом  $r_{n+1} = u_{n+1}/M$ . (3.149)

Здесь  $\operatorname{int}(\dots)$  — целая часть выражения в скобках;  $M$  — максимально возможное количество вырабатываемых датчиком случайных чисел. Если, например, вырабатываются числа в десятичной системе с 8 знаками после запятой, то  $M = 10^8 + 1$ ;  $u_n, u_{n+1}, a, b, c$  являются целочисленными положительными величинами, меньшими  $M$ . Рекурсивные формулы (3.146) — (3.148) дают ряд целых положительных чисел; равномерно распределенную в  $[0,1]$  последовательность получаем делением на  $M$ .

Значения  $a, b, c$  следует выбирать так, чтобы вырабатываемая числовая последовательность была стохастически независима, а распределение частот стремилось к равномерному. Эти свойства выработанных последовательностей чисел могут быть проверены статистическими тестами на случайность и совпадение. Кроме того, период последовательности должен быть возможно большим.

Как пример датчика случайных чисел, вырабатывающего восьмизначные равномерно распределенные случайные числа в десятичной системе, приведем датчик

$$u_{n+1} = 23u_n - (10^8 + 1) \operatorname{int} \left( \frac{23u_n}{10^8 + 1} \right), \quad (3.150)$$

где  $u_0$  — положительное целое нечетное число;  $r_{n+1} = u_{n+1}/(10^8 + 1)$ .

Обстоятельное изложение методов генерации случайных чисел содержится в работе Зелинского [3.41].

Из равномерно распределенных случайных чисел можно соответствующим преобразованием получить случайные значения случайных величин, распределенных по другим законам. Для этих преобразований разработан ряд различных приемов, детально рассмотренных в работах [3.41—3.44]. Ограничимся изложением двух методов — метода обратной функции распределения для выработки случайных чисел одномерных случайных величин и метода, специально приспособленного для случая нормально распределенных величин.

Пусть  $R$  — последовательность равномерно распределенных на  $[0,1]$  случайных величин, а  $F$  — непрерывная монотонно от 0 до 1 возрастающая функция. Определим новую случайную величину

$$X = F^{-1}(R). \quad (3.151)$$

Тогда, в связи с тем что  $P(X \leq x) = P[F^{-1}(R) \leq x] = P[R \leq F(x)] = F(x)$ , функция  $F$  представляет собой функцию распределения  $X$ .

Отсюда следует: если  $\{r_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$  ряд равномерно распределенных на  $[0,1]$  случайных чисел, то  $\{x_n\}$ ,  $n=1, 2, \dots$  ряд  $x_n = F^{-1}(r_n)$  случайных чисел с функцией распределения  $F$ . На рис. 3.19 графически представлено это преобразование.

Для некоторых распределений в прил. II приводятся обратные функции  $F^{-1}$ . К сожалению, для многих типов распределений функция  $F^{-1}$  не может быть получена в замкнутой форме, и тогда ее приходится определять численно, что связано с большими затратами времени.

Изложенный метод применим всегда. Для специальных случаев получены решения, которые дают результат проще и быстрее. Приведем прием получения нормально распределенных случайных чисел, основанный на центральной предельной теореме теории вероятностей.

Эта теорема утверждает, что функция распределения суммы независимых случайных величин сходится к нормальному распределению с ростом числа слагаемых. Это обстоятельство используется при выработке нормально распределенных случайных величин.

Большинство программ для ЭВМ использует сумму 12 равномерно распределенных на  $[0,1]$  случайных чисел. Легко показать, что сумма  $X$ , образованная из  $n$  равномерно распределенных на  $[0,1]$  случайных величин, приблизительно соответствует нормальному распределению с математическим ожиданием  $m_x = n/2$  и стандартным отклонением  $\sigma_x = (n/12)^{1/2}$ . Случайные числа для стандартизированной нор-

мально распределенной случайной величины  $Y$  с  $m_y = 0$  и  $\sigma_y = 1$  получаются по формуле

$$Y = \sum_{n=1}^{12} r_n - 6. \quad (3.152)$$

Это приближение особенно приемлемо в средней области  $\pm 3\delta$ . Вне этой области приближение существенно ухудшается, а за границами  $\pm 6\delta$  датчик (3.152) не дает значений. Это существенно при оценке вероятности отказа, поскольку «хвосты» имеют относительно большое влияние на результат.

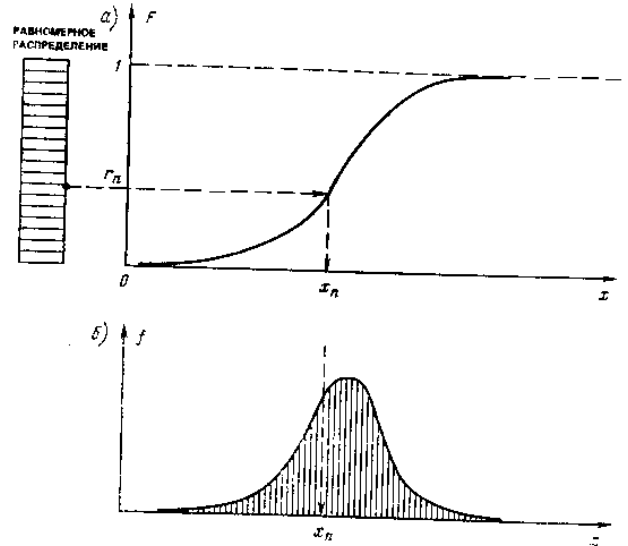


Рис. 3.19. Метод обращения функции  $r_n$  равномерно распределенного на  $(0,1)$  случайного числа по функции распределения  $F(x)$

а — функции распределения; б — плотность распределения

**Определение вероятности отказа методом Монте-Карло.** При обычном варианте метода Монте-Карло вырабатываются случайные числа базисных переменных  $X_1, \dots, X_m$ , подставляются в уравнение предельного состояния, после чего анализируется — имеет ли место отказ или нет, т. е. проверяется — попадает ли случайно выбранная точка в  $x$ -пространстве в область отказа или нет.

Эти вычисления, называемые испытаниями, повторяют многократно, подсчитывая число попаданий в область отказа. При достаточно большом числе испытаний формула

$$\text{Частота отказов} = \frac{\text{Число попаданий в область отказа}}{\text{Общее число испытаний}}$$

дает приближенное значение вероятности отказа.

Этот простой прием применим, если речь идет о достаточно больших значениях вероятностей. Однако, как правило, вероятность отказа сооружения близка к нулю. Если этим методом вычислять малые вероятности, то необходимо чрезвычайно большое число испытаний, которое практически не реализуемо.

Чтобы избежать упомянутых трудностей, используют модифицированные приемы, позволяющие существенно снизить объем испытаний. Ниже приводится метод Ханнуса [3.13], который в отличие от других, разработанных ранее методов [см. формулу (3.45)], легко реализуется на ЭВМ.

Введем новые переменные  $v_i$ :

$$\left. \begin{aligned} v_i &= F_{X_i}(x_i); \\ dv_i &= f_{X_i}(x_i) dx_i, \quad i=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} (3.153)$$

В соответствии с изложенным в предыдущем разделе случайные величины  $V_i$  равномерно распределены на  $[0,1]$ . Подставляя выражение (3.153) в формулу (3.25) для определения вероятности отказа, получаем

$$P_f = \int \dots \int_V dv_1 dv_2 \dots dv_m$$

с областью отказа

$$V = \{v | g [F_{X_1}^{-1}(v_1), F_{X_2}^{-1}(v_2), \dots, F_{X_m}^{-1}(v_m)] < 0\}. \quad (3.154)$$

Преобразование выражения (3.153) позволяет трактовать вероятность отказа как долю объема  $m$ -мерного единичного куба, отсеченной преобразованными условиями отказа.

Для уменьшения числа испытаний введем еще одно преобразование

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \psi_i(z_i); \\ dv_i &= \psi'_i(z_i) dz_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} (3.155)$$

где  $\psi_i$  — монотонное отображение интервала  $[0,1]$  самого на себя.

Функция  $\psi$  растет монотонно от  $\psi=0$  при  $z=0$  до  $\psi=1$  при  $z=1$  и выбирается так, чтобы увеличить область отказа в  $z$ -пространстве.

За счет этого при проведении испытаний по методу Монте-Карло будет большее число попаданий в область отказа. Возникающая при этом ошибка уравнивается введением весо-

вой функции  $w$ , которая в области отказа принимает малые значения.

Подставляя выражение (3.155) в формулу (3.154), получим

$$P_f = \int \dots \int_V \psi'_1(z_1) \psi'_2(z_2) \dots \psi'_m(z_m) \times \\ \times dz_1 dz_2 \dots dz_m \quad (3.156)$$

с областью отказа

$$V = \{z | g [F_{X_1}^{-1}[\psi_1(z_1)], F_{X_2}^{-1}[\psi_2(z_2)], \dots, \\ F_{X_m}^{-1}[\psi_m(z_m)]] < 0\}. \quad (3.157)$$

Следовательно, весовая функция имеет вид:

$$w = \psi'_1(z_1) \psi'_2(z_2) \dots \psi'_m(z_m).$$

Функции  $\psi_i$  должны выбираться так, чтобы обеспечить повышение точности счета и снижение числа испытаний. Если малые значения  $X_i$  соответствуют характеристикам прочности, то подходящей функцией является

$$v_i = \psi_i(z_i) = z_i^k; \quad \psi'_i = k z_i^{k-1}, \quad (3.158)$$

в противном случае, при малых значениях  $X_i$ , соответствующих нагрузке,

$$v_i = \psi_i(z_i) = 1 - (1 - z_i)^k; \quad \psi'_i = k(1 - z_i)^{k-1} \quad (3.159)$$

На рис. 3.20, где показаны эти функции и преобразование  $x_i$  через  $v_i$  в  $z_i$ , видно, как малые ( $i=1$ ) и большие ( $i=2$ ) значения  $x_i$  приводятся к средней области значений  $z_i$ .

Точность данного приема зависит, конечно, от  $k$ . При  $k=1$  имеем обычный метод Монте-Карло. Подходящими значениями являются  $k=2$  или 3. Оптимальное значение  $k$  зависит от вероятности отказа  $P_f$  и от размерности  $m$ .

Ход вычислений таков. Выбирается набор случайных чисел  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , равномерно распределенных на  $[0,1]$ , и делается проверка, попадает ли этот случайный вектор в трансформированную по зависимости (3.157) область отказа в  $z$ -пространстве или нет. При достаточно большом числе испытаний коэффициент, равный сумме весовых функций для попаданий в область отказа, деленной на сумму весовых функций всех испытаний, сходится к искомой вероятности отказа.

Интеграл от весовой функции равен 1;

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 w dz_1 \dots dz_m = 1,$$

поскольку для каждой отдельной компоненты

$$\int_0^1 \psi'_i dz_i = \psi_i(1) - \psi_i(0) = 1.$$

Это значит, что сумма весовых функций всех испытаний сходится к числу испытаний  $n$ . Для больших  $n$  имеет место

$$P_f \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_j. \quad (3.160)$$

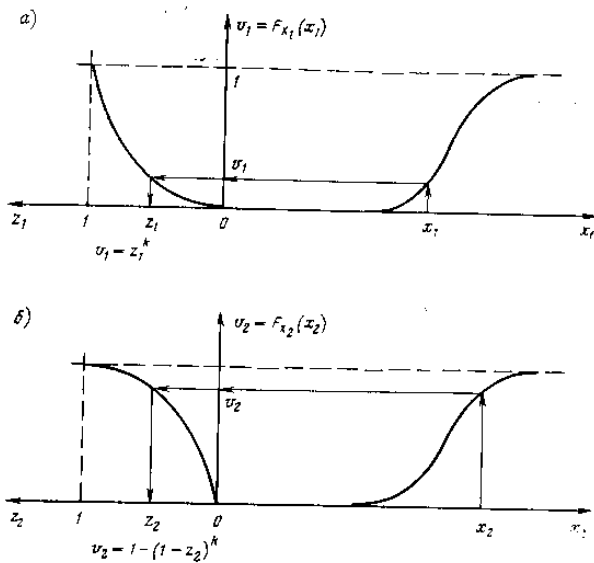


Рис. 3.20. Преобразование случайных величин в методе Монте-Карло для снижения объема статистических испытаний  
а — для сопротивления; б — для нагрузки

Таким образом, получаем следующий алгоритм:

- 1) назначается  $Q=0$ ,  $j=0$ ;
- 2) вырабатывается  $m$  равномерно распределенных на  $[0, 1]$  случайных чисел  $z_1, \dots, z_m$ ;
- 3) вычисляется  $v_i = \psi_i(z_i)$ ,  $i=1, \dots, m$ ;
- 4) вычисляется  $x_i = F_i^{-1}(v_i)$ ,  $i=1, \dots, m$ ;
- 5) вычисляется  $g(x_1, \dots, x_m)$ ;
- 6) если  $g < 0$ , то вычисляется весовая функция  $w = \psi'_1(z_1) \dots \psi'_m(z_m)$  и полагается  $Q = Q + w$ ;

7)  $j=j+1$ , если  $j < n$ , переходим к шагу 2;

8)  $P_f \approx Q/n$ .

**Пример 3.13.** Применим метод Монте-Карло к условиям примера 3.1. Мы хотим получить представление о точности метода и порядке вычисления на этом простом примере, для которого, очевидно, применение метода Монте-Карло нецелесообразно.

Все вычисления проделаны на ЭВМ по написанной на языке BASIC программе, текст которой приведен в прил. III.

Генерация случайных чисел выполняется по выражению (3.150), а вычисление  $v_j$  — по формулам  $v_1 = z_1^k$  и  $v_2 = 1 - (1 - z_2)^k$ ;  $x_j$  определяются из зависимостей:

$$x_1 = x_{01} + \exp[m_u + \sigma_u \Phi^{-1}(v_1)];$$

$$x_2 = u - \frac{1}{a} [\ln(-\ln v_2)].$$

Результат, естественно, зависит от случая. Смотря по тому, каким выбрано стартовое значение  $u_0$ , получаются различные реализации.

С исходными данными примера 3.1 и с  $k=3$  получим результаты, приведенные в таблице, для трех различных начальных значений  $u_0$ .

Число испытаний	Решения с начальным значением		
	$u_0=439\ 147$	$u_0=1\ 523\ 117$	$u_0=2\ 999\ 433$
10	$P_f = 1,26 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 3,022$	$P_f = 5,33 \cdot 10^{-4}$ $\beta_V = 3,273$	$P_f = 1,86 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,901$
100	$P_f = 2,71 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,781$	$P_f = 1,70 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,929$	$P_f = 2,212 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,847$
1 000	$P_f = 2,40 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,820$	$P_f = 1,90 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,895$	$P_f = 2,40 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,821$
10 000	$P_f = 2,32 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,831$	$P_f = 2,02 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,875$	$P_f = 2,16 \cdot 10^{-3}$ $\beta_V = 2,854$

Точное решение  $P_f = 2,13 \cdot 10^{-3}$ ;  $\beta_V = 2,858$ .

Иная теоретически очень простая возможность состоит в том, что приближенно определяются первые два, три или четыре момента запаса прочности  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_m)$  по достаточно большой выборке. От моментов следует перейти к вероятности отказа. Ее можно определить точно только в случае, если известен тип распределения  $Z$ . Однако, поскольку  $Z$  является сложной функцией  $g$ , трудно подобрать какой-либо стандартный тип распределения. Поэтому мы вынуждены выбрать этот тип. Качество выбора можно оценить методами математической статистики, но в самом выборе заложен провал; который влияет на результат.



С выбранным типом распределения и моментами выборки элементарным образом определяется вероятность отказа.

**Одна базисная переменная, зависящая от времени**

Если базисная переменная представляет собой последовательность многих импульсов нагрузки или непрерывный либо дискретный случайный процесс, а другие случайные переменные инвариантны во времени, то проблема может быть сведена к ранее рассмотренным задачам с помощью теории распределения экстремальных значений.

Если  $T$  есть рассматриваемый период времени для оценки вероятности отказа, то все до сих пор рассмотренные соотношения и методы решения имеют силу при введении в них для изменяющейся во времени нагрузки распределения пиковых значений за период времени  $T$ . Очевидно, что зависящий от времени случайный вектор  $X$  выходит за период  $T$  из области безотказной работы только тогда, когда реализация, соответствующая экстремальной нагрузке, оказывается вне области безотказной работы.

В таком случае вероятность отказа есть вероятность того, что запас прочности  $Z(t)$  в какой-то момент времени  $0 \leq t \leq T$  становится меньше нуля:

$$\begin{aligned}
 P_f &= P \{ Z(t) < 0 | t \in [0, T] \} = \\
 &= P \{ g [X_1(t), X_2, X_3, \dots, X_m] < 0 | t \in [0, T] \} = \\
 &= P \left\{ g \left( \frac{\text{ext}}{T} X_1, X_2, X_3, \dots, X_m \right) < 0 \right\} = \\
 &= \int \dots \int f_{\text{ext } X} (x_1, x_2, \dots, x_m) dx_2, \dots, dx_m, \\
 &\quad \{ x | g(x) < 0 \}. \tag{3.161}
 \end{aligned}$$

Таким образом, зависящая от времени задача сведена к задаче (3.22), инвариантной во времени.

В плотность распределения следует ввести плотность распределения экстремального значения зависящей от времени нагрузки.

Для R-S-модели уравнение (3.65) принимает вид:

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{ext } S} (r) f_R (r) dr. \tag{3.162}$$

В дальнейшем следует рассмотреть вопрос об определении  $f_{\text{ext } X}$  и  $F_{\text{ext } X}$  для нагрузки в рассматриваемом интервале времени.

Простейшая возможность состоит в прямом определении этого распределения на основе оценки реализаций нагрузок

статистическими методами. Так, при наблюдении природных воздействий, таких, как снег, ветер, температура, уровень воды и т. д., большое внимание уделяется экстремальным значениям. Как естественный период времени здесь выбирается период в 1 год.

При достаточно длительном периоде наблюдений в качестве типа распределения выбирается один из трех типов распределений экстремальных значений, причем этот выбор зависит от того, имеют ли плотности распределений верхние или нижние границы или уходят в бесконечность. Таким образом, тип распределения часто выбирается на основе того факта, что регулируемые величины представляют собой экстремальные значения.

Часто, однако, период времени наблюдений и рассматриваемый для оценки надежности период не совпадают. Второй период времени, как правило, больше. В таком случае его можно рассматривать как случайную последовательность периодов времени наблюдений. Если периоды времени наблюдений достаточны продолжительны, то можно предположить стохастическую независимость между соседними экстремальными значениями. В этом случае справедливы выражения (2.47) — (2.50) и в расчет следует ввести формулы:

$$\left. \begin{aligned}
 F_{\text{ext } X} &= F_{\text{max } X} = (F_X)^n; \\
 f_{\text{ext } X} &= f_{\text{max } X} = n (F_X)^{n-1} f_X,
 \end{aligned} \right\} \tag{3.163}$$

если рассматривается максимальное значение нагрузки, и

$$\left. \begin{aligned}
 F_{\text{ext } X} &= F_{\text{min } X} = 1 - (1 - F_X)^n; \\
 f_{\text{ext } X} &= f_{\text{min } X} = n (1 - F_X)^{n-1} f_X,
 \end{aligned} \right\} \tag{3.164}$$

если рассматривается минимальное значение. Здесь  $n$  представляет собой отношение

$$n = \frac{\text{Период времени для оценки надежности}}{\text{Период времени наблюдений}} \tag{3.165}$$

или при случайной последовательности независимых состояний нагружения (например, по рис. 2.7) — число этих нагружений за рассматриваемый период  $T$  оценки вероятности отказа.

При больших  $n$  эти распределения сходятся, естественно, к одному из трех типов асимптотических распределений экстремальных значений. Нормальное распределение, например, сходится к типу I, поскольку его плотность не ограничена с обеих сторон.

Если нормальное распределение имеет среднее  $m_x$  и стандартное  $\sigma_x$  отклонения, то для больших  $n$  оно сходится к распределению типа I со средним отклонением

$$m_{ext x} \approx m_x \pm \sigma_x \left( \sqrt{2 \ln \frac{n}{2\pi}} + 0,57722 / \sqrt{2 \ln \frac{n}{2\pi}} \right)$$

и стандартным

$$\sigma_{ext x} \approx 1,28255 \sigma_x \sqrt{2 \ln \left( \frac{n}{2\pi} \right)}. \quad (3.166)$$

Здесь знак «плюс» относится к распределению наибольших значений, а «минус» — к распределению наименьших значений.

Если имеется информация о коэффициенте выброса  $v^+$  ( $r$ ) случайного процесса, то распределение экстремальных значений для больших уровней  $r$  может быть оценено по формуле (2.114).

Вычисление вероятности отказа особенно просто, если изменяющаяся во времени нагрузка является единственной стохастической величиной ( $m=1$ ). В этом случае при однократном нагружении

$$P_{i1} = 1 - F_{x_1} [g^{-1}(0)],$$

а при многократном

$$P_{in} = 1 - \{F_{x_1} [g^{-1}(0)]\}^n.$$

Отсюда следуют для различных периодов времени простые формулы перехода:

для вероятности отказа

$$P_{in} = 1 - (1 - P_{i1})^n; \quad (3.167)$$

для индекса безопасности по формуле (3.139)

$$\beta_n = \Phi^{-1} [\Phi(\beta_1)]^n. \quad (3.168)$$

Практически те же результаты для малых вероятностей отказа следуют из приближенного соотношения

$$\beta_n \approx -\Phi^{-1} [n \Phi(-\beta_1)]. \quad (3.169)$$

Выражения (3.167) — (3.169) можно использовать в качестве приближенных и для общего случая  $m > 1$ , если нагрузка, меняющаяся во времени, оказывает доминирующее влияние на вероятность отказа и абсолютное значение коэффициента чувствительности  $\alpha_1$  велико по сравнению с абсолютными значениями прочих  $\alpha_i$ . Приближенные значения при этом идут в запас прочности.

*Пример 3.14.* Вновь рассмотрим консольную балку из примера 3.1, предполагая теперь, что нагрузка  $X_2$  действует подряд  $n$  раз, причем последовательность этих сил распределена по  $F_{x_2}$  и стохастически независима. Расчет проводится по теории надежности 1-го порядка, а преобразование выполняется по формуле (3.117):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= F_{x_1}^{-1} \{[\Phi(y_1)]^{1/n}\}; \\ y_1 &= \Phi^{-1} \{[F_{x_2}(x_2)]^n\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.170)$$

В этом примере доминирующее влияние на отказ оказывает нагрузка, а не предел текучести стали.

В примере 3.10 были найдены коэффициенты чувствительности:

$$|\alpha_2| = 0,9182 > 0,3962 = |\alpha_1|.$$

В связи с этим следует ожидать, что и формула (3.168) даст приемлемый результат.

На рис. 3.21 сопоставлены результаты расчета по теории надежности 1-го порядка и по приближенному выражению (3.168) в зависимости от числа  $n$  появлений нагрузки.

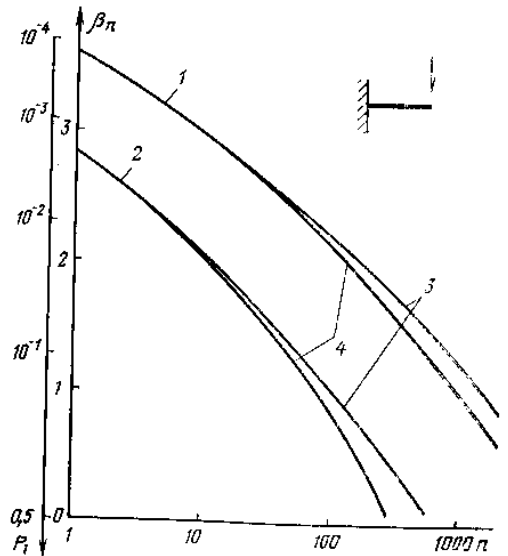


Рис. 3.21. Индекс безопасности и вероятность отказа для нагрузок на консольную балку из примера 3.1

1 — образование пластического шарнира; 2 — текучесть в фибрах; 3 — значение  $\beta_n$ , определенное по теории надежности 1-го порядка; 4 —  $\beta_n \approx \Phi^{-1} [\Phi(\beta_1)]^n$

До сих пор предполагалось, что в рассматриваемый период времени  $T$  действуют точно  $n$  импульсов нагрузки. Однако часто возникает ситуация, когда само число нагружений является случайной величиной  $N$  за время  $T$ .

Определим вероятность отказа в предположении, что число нагружений является дискретной случайной величиной с вероятностями:

$$P_n = P(N=n); \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1. \quad (3.171)$$

Вероятность отказа есть вероятность того, что предельное состояние будет превзойдено или при  $N=1$ , или при  $N=2$ , или при  $N=3$  и т. д. Итак,

$$P_{iN} = P[(g < 0 \cap N=1) \cup (g < 0 \cap N=2) \cup \dots] = \\ = P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (g < 0 \cap N=n)\right]. \quad (3.172)$$

Отсюда следует (см. также п. 2.2) вероятность отказа:

$$P_{iN} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n P(g < 0 | N=n); \\ P_{iN} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n P_{in}, \quad (3.173)$$

где  $P_{in}$  — вероятность отказа при  $N=n$ .

Для  $R$ — $S$ -модели с учетом выражений (3.162) и (3.163) можно записать:

$$P_{iN} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \int_{-\infty}^{\infty} F_S^n(r) f_R(r) dr. \quad (3.174)$$

Если доминирует нагрузка, меняющаяся во времени, и выражение (3.167) достаточно точно, то можно записать:

$$P_{iN} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_n (1 - P_n)^n. \quad (3.175)$$

Предполагается, что известны вероятности  $P_n$  для числа нагружений за рассматриваемый период времени. Эти вероятности зависят, естественно, от характера последовательности нагружений. Часто можно предположить, что нагружения подчиняются стационарному пуассонову процессу (см. п. 2.4) [3.10]. Это значит, что интервалы времени между следующими друг за другом нагружениями распределяются по экспоненциальному закону. В таком случае, число нагружений за время  $t$  распределено по закону Пуассона, и вероятность того, что  $N=n$  в течение времени  $t$ , составляет:

$$P_n = P[N(t)=n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t), \\ n=0, 1, 2, \dots, \quad (3.176)$$

где  $\lambda$  — коэффициент обновления, равный среднему числу нагружений за единицу времени.

Если подставить выражение (3.176) в формулу (3.174), то после элементарных преобразований получим

$$P_{iN} = P_i(t) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda t G_S(r)] f_R(r) dr. \quad (3.177)$$

как вероятность отказа  $R$ — $S$ -модели на интервале  $[0, t]$ . Здесь вновь введено сокращенное обозначение  $G_S(r) = 1 - F_S(r)$ .

И для всех других параметров надежности, представленных в табл. 3.1, при их зависимости от времени можно дать простые формулы.

Вероятность безотказной работы

$$P_S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda t G_S(r)] f_R(r) dr. \quad (3.176)$$

Плотность вероятности срока существования

$$f_T(t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda t G_S(r)] G_S(r) f_R(r) dr. \quad (3.179)$$

Математическое ожидание срока существования

$$E[T_L] = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_R(r)}{1 - F_S(r)} dr. \quad (3.160)$$

Плотность отказов

$$h_i(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda t G_S(r)] G_S(r) f_R(r) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda t G_S(r)] f_R(r) dr}. \quad (3.161)$$

Эти соотношения впервые были получены Фройденталем и др. [3.10]. Подробные выкладки можно найти также в работе Крыкаша и др. [3.49].

Можно показать, что плотность отказов  $h_i(t)$  всегда представляет собой функцию, монотонно убывающую во времени, независимо от того, каковы распределения  $R$  и  $S$ . Доказательство этого положения можно найти, среди прочего, в работах Анга и Амина [3.48] и Крыкаша и Керскена — Бредли [3.49].

Это означает, что с увеличением времени эксплуатации сооружения становятся надежнее. Вероятность, что откажет недавно построенное сооружение, всегда больше, чем вероятность отказа давно существующего сооружения.

Сначала этот вывод кажется нелепым, поскольку противоречит житейскому опыту. Но он станет ясен, если подробнее оценить предпосылки математической модели. В ней предполагается, что несущая способность сооружения не меняется во времени, процессами старения мы пренебрегли. Эта модель учитывает выход из строя за счет экстремального превышения нагрузки над постоянным во времени сопротивлением. Если пренебречь в предпосылках процессами старения, то нельзя ожидать, что построенная на этих предпосылках теория может отразить эти процессы.

Функция  $h_t(t)$  по формуле (3.181) отражает только фазу  $I$  кривой, показанной на рис. 3.2. Фаза старения  $III$  может быть учтена, если сопротивление  $R$  рассматривать, как функцию времени.

Если принять сопротивление постоянным во времени и детерминированным или почти детерминированным, так что доминирует меняющаяся нагрузка, то можно дать ряд простых формул для разных периодов, которые могут оказаться полезными. Так, для вероятности отказа имеет место формула

$$P_f(t_2) = 1 - [1 - P_f(t_1)]^{t_2/t_1}, \quad (3.182)$$

а для индекса безопасности

$$\beta_v(t_2) = \Phi^{-1} \{ \Phi [\beta_v(t_1)]^{t_2/t_1} \}, \quad (3.183)$$

или

$$\beta_v(t_2) \approx -\Phi^{-1} \left\{ \frac{t_2}{t_1} \Phi [-\beta_v(t_1)] \right\}. \quad (3.184)$$

Выражения (3.177) — (3.181) справедливы в предположении, что моменты появления нагрузки подчиняются закону Пуассона, т. е. интервалы времени между двумя нагружениями распределены по экспоненциальному закону. При более общих предположениях Бикли [3.50] дал способ определения распределения экстремальных значений на интервале  $[0, t]$  и как пример рассмотрел интервалы с гамма-распределением.

Все выкладки в этом разделе верны при стохастической независимости отдельных нагружений. Только в этом случае получаем такие простые соотношения. Раквиц дал приближенный способ определения распределения экстремальных значений и индекса безопасности в случае зависимых последовательностей нагружений [3.51]. Это сделано на основе результатов Кларка [3.52] относительно моментов распределения экстремальных значений последовательности нормально

распределенных случайных величин с произвольными коэффициентами корреляции.

Григориу и Туркстра [3.53] приближенно определили для коррелированных случайных последовательностей распределения экстремальных значений через коэффициенты выброса и показали на основе сравнительных расчетов, что для широких пределов изменений коэффициентов корреляции и повторений нагружений пренебрежение корреляцией и использование простых соотношений (3.172) дает достаточно точные и идущие в запас значения индекса безопасности.

#### Многие базисные переменные, зависящие от времени

**Основные положения.** Если многие случайные нагрузки  $X_i(t)$  зависят от времени, то с высокой степенью вероятности экстремальные значения различных процессов нагружения не совпадают во времени. Следовательно, невозможно найти решение пользуясь только распределениями экстремальных значений. Необходимо учитывать больше информации о течении процесса. То же справедливо и для случая, если сопротивление также меняется во времени.

В этом случае общая оценка вероятности отказа имеет вид:

$$P_f = P \{ Z(t) < 0 | t \in [0, T] \} = \\ = P \{ g[X_1(t), \dots, X_m(t)] < 0 | t \in [0, T] \}. \quad (3.185)$$

Несущая конструкция отказывает, если случайный зависящий от времени вектор

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), \dots]^T$$

в момент времени  $t$  срока эксплуатации покидает область безопасности работы  $S = \{x | g(x) \geq 0\}$  и оказывается в области отказа. Геометрически история нагружения может быть представлена как случайная траектория в  $x$ -пространстве (рис. 3.22). Отказ наступает, если  $X(t)$  уже в начальный момент времени  $t=0$  находится в области отказа или за период  $0 < t \leq T$  наблюдается по меньшей мере один выход из области безотказной работы.

Обозначим через  $N^+$  число пересечений функции предельных состояний в направлении к области отказа.  $N^+$  является дискретной случайной величиной, которая может принимать значения  $0, 1, 2, \dots$

Поэтому можно записать:

$$P_f = P \{ g[X(t=0)] < 0 \cup N^+(0 < t \leq T) \geq 1 \}.$$

Формальное преобразование с помощью формулы (2.5) дает:

$$P_f = P(g[X(t=0)] < 0) + P[N^+(0 < t \leq T) \geq 1] - P(g[X(t=0)] < 0 \cap N^+(0 < t \leq T) \geq 1). \quad (3.186)$$

Первый член этого выражения представляет вероятность того, что сооружение уже в момент  $t=0$ , т. е. в начале срока эксплуатации, выходит из строя. Эта вероятность может быть вычислена приемами, описанными ранее, и, таким образом, рассматривается как известная величина.

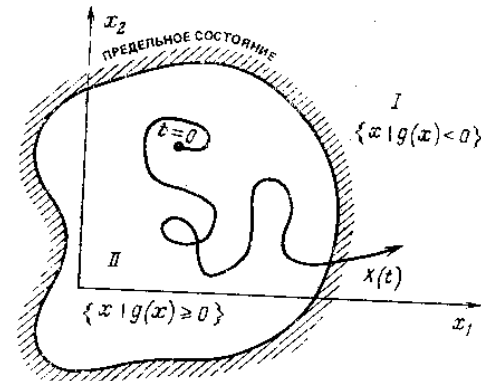


Рис. 3.22. Процесс  $X(t)$  выходит за пределы области безотказной работы (векторные величины подчеркнуты)

I — область отказа;  
II — область безотказной работы

Последнее слагаемое представляет вероятность того, что имеет место отказ в момент времени  $t=0$ , а кроме того, в интервале  $[0, T]$  появляется пересечение уровня. Эта вероятность по сравнению с двумя другими слагаемыми, очевидно, очень мала и ею можно пренебречь.

В таком случае получаем выражение

$$P_f \leq P_f(0) + P[N^+(T) \geq 1], \quad (3.187)$$

представляющее собой верхнюю оценку вероятности отказа.

Обратимся теперь ко второму слагаемому. Для этого рассмотрим среднее число выбросов из области безотказной работы в единицу времени:

$$v^+(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(g[X(t) > 0] \cap g[X(t+\Delta t) < 0]). \quad (3.188)$$

Это число связано с математическим ожиданием числа положительных пересечений уровня в рассматриваемый промежуток времени

$$E[N^+(0 < t \leq T)] = \int_0^T v^+(t) dt. \quad (3.189)$$

а в стационарном случае, когда  $v^+$  постоянно,

$$E[N^+(0 < t \leq T)] = v^+ T. \quad (3.190)$$

При этом имеют место элементарные зависимости:

$$E[N^+] = 0 P(N^+=0) + 1 P(N^+=1) + 2 P(N^+=2) + \dots + P[N^+ \geq 1] = P(N^+=1) + P(N^+=2) + \dots$$

Из почленного сравнения видно, что справедливо неравенство

$$P(N^+ \geq 1) \leq E[N^+]. \quad (3.191)$$

Если отказ является редким событием, то  $E[N^+]$  только немного больше, чем  $P(N^+ \geq 1)$ , поскольку очевидно, что  $P(N^+ = 2)$  значительно меньше, чем  $P(N^+ = 1)$ .

С помощью выражений (3.187), (3.190) и (3.191) можно оценить вероятность отказа:

$$P_f(T) \leq P_f(0) + E[N^+] = P_f(0) + v^+ T, \quad (3.192)$$

или, если процессы нестационарны,

$$P_f(T) \leq P_f(0) + \int_0^T v^+(t) dt. \quad (3.193)$$

Часто имеет место  $P_f(0) \ll v^+ T$ , тогда

$$P_f(T) \approx v^+ T \text{ или } P_f(T) \approx \int_0^T v^+(t) dt. \quad (3.194)$$

Это означает, что необходимо определить лишь коэффициент выброса  $v^+$ .

Однако эта задача — определение вероятности выброса многомерного случайного вектора из области безотказной работы, ограниченной произвольной поверхностью предельного состояния  $g(x) \geq 0$ , в общей математической форме чрезвычайно сложна и на сегодня разрешима только для особых случаев, в зависимости от типа процессов и структуры уравнения предельного состояния.

В этой вводной части мы ограничимся некоторыми простыми, но практически важными случаями. Сначала рассматривается задача состояния нагрузок в расширенной  $R-S$ -модели с линейным уравнением предельного состояния  $g=r-s_1-s_2=0$  и запасом прочности

$$Z(t) = R - S_1(t) - S_2(t). \quad (3.195)$$

Для этой задачи даются соотношения для оценки вероятности отказа при стационарных процессах нагружения различных видов. Данная задача имеет большое значение для научно обоснованного назначения коэффициентов сочетания в нормах.

Не только нагрузки, но и внутреннее сопротивление может меняться во времени. Для практики особенно важна проблема усталостной прочности.

Ниже на простом примере будет показана справедливость гипотезы Майнера, позволяющей свести эту проблему к уже рассмотренным и оценить вероятность отказа.

**Нагрузки, являющиеся случайными последовательностями.** Пусть процессы нагружения  $S_i(t)$  в формуле (3.195) являются случайными последовательностями независимых идентично распределенных случайных величин, показанными на рис. 2.7 и рассмотренными в п. 2.3. Дополнительно следует учесть, что нагрузки не действуют непрерывно, а с вероятностью  $p_i$  обращаются в нуль.

Модель нагружения базируется на следующих предположениях:

для каждой нагрузки  $S_i$  срок эксплуатации  $T$  разбит на равные интервалы длительностью  $d_i$ ; в пределах каждого интервала нагрузка постоянна;

появление или отсутствие нагрузки  $S_i$  в интервале соответствует последовательности независимых испытаний с вероятностью появления события  $q_i$ ;

если нагрузка появляется в некотором интервале, то ее величина соответствует распределению по закону  $F_{S_i}$ ;

величины нагрузок в разные интервалы времени стохастически независимы;

появление нагрузки и ее величина не зависят друг от друга.

Одна из реализаций такой модели нагрузок для предельного состояния [см. формулу (3.195)] представлена на рис. 3.23. Для такого случая может быть найдено решение на основе теории распределений экстремальных значений.

Данная модель нагрузки впервые была предложена Ферри Борджесом и Кастанетой [3.54], Раквиц и Фислер [3.28, 3.29] исследовали ее для общего случая уравнения предельного

состояния и дали решение на основе теории надежности 1-го порядка.

Способ решения поясним на простейшем частном случае двух меняющихся нагрузок.

Определим сначала распределение экстремальных значений в интервале  $d_1$  для наиболее сильно меняющейся нагрузки  $S_2$ .

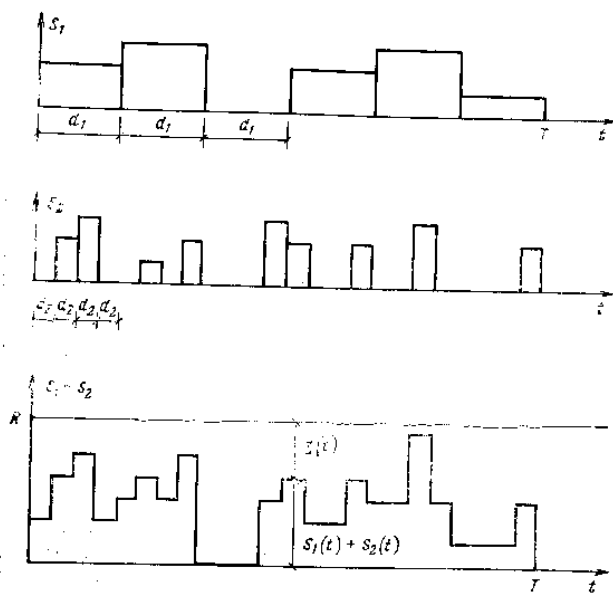


Рис. 3.23. Сочетание двух случайных последовательностей нагрузок

С учетом выражений (2.61) и (3.163) оно имеет вид:

$$F_{\text{ext } S_2}(s_2) = \{1 - q_2 [1 - F_{S_2}(s_2)]\}^{d_2/d_1}; \quad (3.196)$$

$S_1$  и  $\text{exp } S_2$  относятся к одному и тому же интервалу времени и имеет место их суперпозиция. Введем вспомогательную случайную величину  $Z_1 = S_1 + \text{exp } S_2$  с распределением

$$F_{Z_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z_1 - s_1} f_{\text{ext } S_2}(s_2) f_{S_1}(s_1) \times \\ \times ds_2 ds_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{ext } S_2}(z_1 - s_1) f_{S_1}(s_1) ds_1.$$

На оценку безопасности влияет период времени  $T$ . Для него должно быть найдено распределение экстремальных значений суммы обеих нагрузок:

$$F_{\text{ext } Z_1}(z_1) \approx \{1 - q_1 [1 - F_{Z_1}(z_1)]\}^{T/d_1}$$

Вероятность отказа следует из формулы

$$\begin{aligned} P_f &= P(R - S_1 - S_2 < 0) = P(R - Z_1 < 0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{ext } Z_1}(z_1) f_R(r) dz_1 dr = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_{\text{ext } Z_1}(r)] f_R(r) dr. \end{aligned} \quad (3.197)$$

Итак, в рассмотренном приеме попеременно образуются экстремальные значения и суммируются случайные величины. Если исключить вспомогательную случайную величину  $Z_1$ , то алгоритм сведется к одному единственному выражению

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \left[ 1 - q_1 \left( 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - q_2 [1 - F_{S_2}(r - s_1)]\}^{d_2/d_2} \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times f_{S_1}(s_1) ds_1 \right) \right] \right\}^{T/d_1} f_R(r) dr. \end{aligned} \quad (3.198)$$

которое может быть определено численным интегрированием.

Видно, что этот прием весьма трудоемок, если нужно учитывать больше двух, зависящих от времени, нагрузок. В этом случае целесообразно применять решение, приведенное в работах [3.28, 3.29] на основе теории надежности 1-го порядка.

**Нагрузки, представленные гауссовым процессом.** Если нагрузки  $S_i(t)$  описываются независимыми стационарными гауссовыми процессами, определяемыми средним  $m_{S_i}$  и функцией автокорреляции  $R_{S_i S_i}(\tau)$ , а сопротивление  $R$  является нормально распределенной случайной величиной со средним  $m_R$  и стационарным отклонением  $\sigma_R$ , то запас прочности  $Z(t)$ , поскольку уравнение предельного состояния (3.195) линейно, также является гауссовым процессом, имеющим среднее

$$m_Z = m_R - \sum_i m_{S_i} \quad (3.199)$$

и корреляционную функцию

$$R_{Z,Z}(\tau) = \sigma_R^2 + \sum_i R_{S_i, S_i}(\tau).$$

Дважды дифференцируя корреляционную функцию по времени

$$\frac{d^2 R_{Z,Z}(\tau)}{d\tau^2} = \sum_i \frac{d^2 R_{S_i, S_i}(\tau)}{d\tau^2},$$

получаем стандартное отклонение запаса прочности, а по выражению (2.119) его производной по времени:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sqrt{R_{Z,Z}(0)} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sum_i R_{S_i, S_i}(0)}; \\ \sigma_{\dot{z}} &= \sqrt{-\sum_i \frac{d^2 R_{S_i, S_i}(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0}}. \end{aligned} \quad (3.200)$$

После подстановки в выражение (2.124) для уровня  $r=0$ , получаем среднее число пересечений снизу нулевого уровня процессом:

$$v^+(0) = v^-(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_{\dot{z}}}{\sigma_z} \varphi\left(-\frac{m_z}{\sigma_z}\right). \quad (3.201)$$

Если учесть, что  $m_z / \sigma_z$  есть не что иное, как индекс безопасности для текущего момента времени  $t$ , то, подставляя выражения (3.201) в формулу (3.192), получаем верхнюю оценку вероятности отказа для периода времени  $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} P_f(T) &\leq P_f(0) + v^-(0) T \approx \Phi(-\beta) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_{\dot{z}}}{\sigma_z} \varphi(\beta). \end{aligned} \quad (3.202)$$

По формуле (3.139) можно найти и выражение для обобщенного индекса безопасности для периода  $0 \leq t \leq T$ :

$$\begin{aligned} \beta_v(T) &\approx -\Phi^{-1} [\Phi(-\beta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \frac{\sigma_{\dot{z}}}{\sigma_z} \varphi(\beta)]. \end{aligned} \quad (3.203)$$

**Нагрузки, представленные двухпараметрическим импульсным процессом с прямоугольной формой импульсов.** Рассмотрим сначала сумму  $S_1(t) + S_2(t)$  двух таких процессов. О типе распределения амплитуд нагрузок не делается никаких предположений.

Пересечение уровня  $r$  в какой-то момент времени возможно только тогда, когда имеется скачок или в  $S_1(t)$  или в  $S_2(t)$ .

Вероятность того, что скачки происходят одновременно, равна нулю.

Если  $S_1(t)$  меняется скачком,  $S_2(t) = S_2$  постоянна, то  $v_1^+(r) = v_{S_1}^+(r - s_2)$  с коэффициентом выброса  $v_{S_1}^+$  процесса  $S_1(t)$ , определяемым по формуле (2.136) или (2.137). Если, однако,  $S_2$  случайна, то в соответствии с изложенным в п. 2.3

$$v_1^+(r) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{S_1}^+(r - s_2) f_{S_2}^{\Delta}(s_2) ds_2.$$

Аналогично для скачка в  $S_2$

$$v_2^+(r) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{S_2}^+(r - s_1) f_{S_1}^{\Delta}(s_1) ds_1.$$

Коэффициент выброса для скачка или в  $S_1$  или в  $S_2$  получается, поскольку речь идет о взаимно исключающих событиях, как сумма

$$v^+(r) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{S_1}^+(r - s) f_{S_2}(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} v_{S_2}^+(r - s) \times \times (r - s) f_{S_1}(s) ds, \quad (3.204)$$

где  $f_{S_i}$  — плотность распределения мгновенного значения  $S_i(t)$  с учетом возможных пауз в процессе нагружения по формуле (2.61).

Для трех импульсных процессов по аналогии получаем:

$$v^+(r) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{S_1}^+(r - s) f_{S_{22}}(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} v_{S_2}^+(r - s) \times \times f_{S_{11}}(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} v_{S_3}^+(r - s) f_{12}(s) ds, \quad (3.205)$$

где

$$f_{S_{ij}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{S_i}(s_i) f_{S_j}(s - s_i) ds_i \quad (3.206)$$

и представляет собой плотность распределения мгновенной суммы  $S_i(t) + S_j(t)$ .

Предположим теперь, что внутреннее сопротивление  $R$  является случайной величиной. Тогда в соответствии с п. 2.3

следует интегрировать также и по  $r$ . В случае двух нагрузок получаем:

$$v^+(R) = \lambda_1 q_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{S_1}(r - s) f_{S_2}(s) \times \times f_R(r) ds dr + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_{S_2}^+(r - s) f_{S_1}(s) \times \times f_R(r) ds dr. \quad (3.207)$$

Если нагрузки при каждом обновлении возвращаются на уровень нуля (рис. 2.13, б), то для  $v_{S_1}^+$  справедливо выражение (2.137) и можно записать:

$$v^+(R) = \lambda_1 q_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1} G_{S_1}(r - s) f_{S_2}(s) f_R(r) ds dr + \lambda_2 q_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_2} G_{S_2}(r - s) f_{S_1}(s) f_R(r) ds dr. \quad (3.208)$$

Появившиеся здесь интегралы есть не что иное, как интегралы свертки для уравнения предельного состояния (3.195). Они могут быть определены и приближенно на основе теории надежности 1-го порядка:

$$v^+(R) = \lambda_1 q_1 \Phi(-\beta_1) + \lambda_2 q_2 \Phi(-\beta_2);$$

в более общем случае для  $m$  процессов нагружения

$$v^+(R) = \sum_{i=1}^m \lambda_i q_i \Phi(-\beta_i).$$

Подставляя это выражение в формулу (3.192), получаем приближенное значение вероятности отказа за период времени  $T$ :

$$P_f(T) \approx \Phi(-\beta_0) + T \sum_i \lambda_i q_i \Phi(-\beta_i), \quad (3.209)$$

где  $\lambda_i$  — интенсивность  $i$ -того процесса нагружения;  $q_i$  — вероятность того, что  $i$ -тый процесс активен;  $\beta_0$  — индекс безопасности, вычисленный по распределениям текущих значений всех процессов;  $\beta_i$  — индекс безопасности, вычисленный по распределениям пиковых значений  $i$ -того процесса и по текущим значениям всех остальных процессов.

Обобщенный индекс безопасности для периода времени  $T$  имеет вид:

$$\beta_v(T) \approx -\Phi^{-1} [\Phi(-\beta_0) + T \sum_i \lambda_i q_i \times \times \Phi(-\beta_i)]. \quad (3.210)$$



Если нагрузки в точках обновления не возвращаются к нулю, то справедливо выражение (3.126) с  $v^+$ , определяемым по формуле (2.136). Однако, если вероятность отказа мала, различие между обоими типами процессов не существенно.

Дальнейшие подробности по поводу суперпозиции двух-параметрических импульсных процессов можно найти в работах Ларраби и Корнелла [2.14, 3.87] и Мадсена [2.13].

**Пример 3.15.** Консольная балка по рис. 3.24 нагружена двумя импульсными процессами с прямоугольными импульсами, один из которых представляет собой относительно долговременно действующую нагрузку, а второй — кратковременную. Величины нагрузок после каждого импульса падают до нуля.

Заданные статистические параметры для предела текучести в заделке  $R$  и обоях процессов нагружения приведены в таблице.

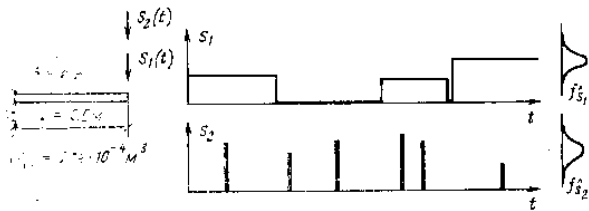


Рис. 3.24. К примеру 3.15

$X_i$	Среднее пиковых значений $m_i$	Стандартное отклонение пиковых значений $\sigma_i$	Граница распределения $x_{0,i}$	Тип распределения	Среднее значение времени обновления $m_{E_i}$	Среднее значение длительности нагружения $m_{D_i}$
$R$	265 010	25 000	160 000	LN	—	—
$S_1$	10	1	—	N	120	60
$S_2$	8	1	—	EI	37,5	0,3

Каковы значения вероятности отказа и индекса безопасности по фибровой текучести для периода времени  $T=1$  год? Считаем, что имеют место импульсные двухпараметрические процессы. По формулам (2.129) и (2.130) получим:

$$\lambda_1 = m_1 / 1 = 1/60 = 0,01667 \text{ сут}^{-1};$$

$$q_1 = m_1 / m_{E_1} = 60/120 = 0,5; \quad p_1 = 1 - q_1 = 0,5;$$

$$\lambda_2 = 1/0,3 = 3,3333 \text{ сут}^{-1};$$

$$q_2 = 0,3 - 37,5 = 0,0080; \quad p_2 = 0,9920.$$

В соответствии с формулами (3.209) и (3.210) вычислим сначала индекс безопасности для уравнения предельного состояния  $g = W_{e_1} - 1S_1 - 1S_2$

при трех комбинациях нагрузок. Для этой цели используется итерационный метод с различными распределениями нагрузок:

1) текущие значения  $S_1(t)$ ;  $F_{S_1}(s) = p_1 + q_1 F_{S_1}^{\wedge}(s)$ ,

текущие значения  $S_2(t)$ ;  $F_{S_2}(s) = p_2 + q_2 F_{S_2}^{\wedge}(s)$ ,  
результат  $\beta_0 = 4,964$ ;

2) пиковые значения  $S_1(t)$ ;  $F_{S_1}(s) = F_{S_1}^{\wedge}(s)$ ,

текущие значения  $S_2(t)$ ;  $F_{S_2}(s) = p_2 + q_2 F_{S_2}^{\wedge}(s)$ ,  
результат  $\beta_1 = 4,859$ ;

3) текущие значения  $S_1(t)$ ;  $F_{S_1}(s) = p_1 + q_1 F_{S_1}^{\wedge}(s)$ ,

пиковые значения  $S_2(t)$ ;  $F_{S_2}(s) = F_{S_2}^{\wedge}(s)$ ,  
результат  $\beta_2 = 3,946$ .

С этими значениями из формулы (3.209) для периода времени  $T=365$  сут получаем:

$$P_f(T) \approx \Phi(-4,964) + 365 \left[ \frac{0,5}{60} \Phi(-4,859) + \frac{0,008}{0,3} \Phi(-3,946) \right] =$$

$$= 3,458 \cdot 10^{-7} + 365 (0,008333 \cdot 5,907 \cdot 10^{-7} + 0,02667 \cdot 3,975 \cdot 10^{-5}) = 3,890 \cdot 10^{-4};$$

$$\beta_V(T) = \Phi^{-1}(3,890 \cdot 10^{-4}) = 3,361.$$

**Нагрузки, представленные трехпараметрическими процессами с прямоугольной формой импульсов.** При суперпозиции двух неотрицательных трехпараметрических процессов с прямоугольной формой импульсов пересечения уровней могут вызываться тремя различными событиями:

1. Пиковое значение первого процесса  $S_1(t)$  пересекает уровень  $r$ , в то время как второй процесс  $S_2(t) = 0$  (момент времени  $t_1$  на рис. 3.25). По формуле (2.143) имеем:  $v_1^+ = \lambda_1 G_{S_1}^{\wedge}(r)$ .

2. Пиковое значение  $S_2(t)$  пересекает  $r$ , а  $S_1(t) = 0$  (момент  $t_2$  на рис. 3.25):  $v_2^+ = \lambda_2 G_{S_2}^{\wedge}(r)$ .

3. Оба нагружения совпадают по времени, и уровень  $r$  пересекает сумма  $S_1(t) + S_2(t)$  в то время как каждая нагрузка по отдельности не превосходит  $r$  (момент времени  $t_3$  на рис. 3.25):  $v_{12}^+ = \lambda_{12} G_{S_{12}}^{\wedge}(r)$ .

где  $G_{S_{12}}^{\wedge}(r) = 1 - F_{S_{12}}^{\wedge}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{S_1}^{\wedge}(r-s) f_{S_2}^{\wedge}(s) ds$  — функция распределения суммы пиковых значений нагрузок для уровня  $r$ .

Эти простые выражения справедливы, если средняя продолжительность действия нагрузки  $m_{D_i}$  мала по сравнению с интервалом между двумя обновлениями нагрузки  $m_{E_i}$ .

Для средней интенсивности совпадений во времени двух

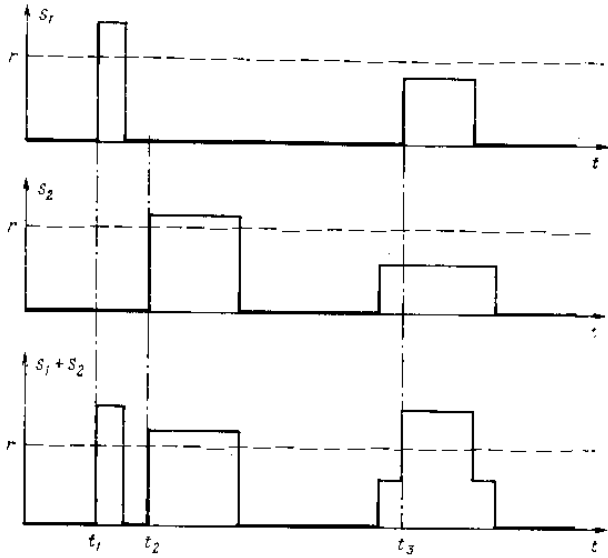


Рис. 3.25. Суперпозиция двух трехпараметрических процессов

состояний нагружения Уэн [3.59] дал приближенное соотношение

$$\lambda_{12} = \lambda_1 \lambda_2 (m_{D_1} + m_{D_2}), \quad (3.211)$$

где  $\lambda_i = 1/m_{E_i}$  — интенсивность  $i$ -того процесса;  $m_{D_i}$  — среднее значение случайной длительности нагружения  $D_i$ .

Отсюда получаем коэффициент выброса для двух трехпараметрических процессов с короткими импульсами:

$$v^+(r) \approx \lambda_1 G_{S_1}^\wedge(r) + \lambda_2 G_{S_2}^\wedge(r) + \lambda_1 \lambda_2 \times \\ \times (m_{D_1} + m_{D_2}) G_{S_{12}}^\wedge. \quad (3.212)$$

Это выражение можно обобщить на случай  $n$  процессов нагружения [3.59, 3.60]:

$$v^+(r) \approx \sum_{i=1}^n \lambda_i G_{S_i}^\wedge(r) \approx \sum_{i \neq j}^n \sum_{i \neq k}^n \lambda_i \lambda_j (m_{D_i} + \\ + m_{D_j}) G_{S_{ij}}^\wedge + \sum_{i \neq j \neq k}^n \lambda_i \lambda_j \lambda_k \times \\ \times (m_{D_i} m_{D_j} + m_{D_i} m_{D_k} + m_{D_j} m_{D_k}) \times G_{S_{ijk}}^\wedge. \quad (3.213)$$

При этом пренебрегаем возможностью одновременного появления четырех и более процессов.

Если внутреннее сопротивление  $R$  случайно, то следует дополнительно проинтегрировать с плотностью распределения  $f_R$

$$v^+(R) = \int_{-\infty}^{\infty} v^+(r) f_R(r) dr.$$

Появляющиеся здесь интегралы свертки, по структуре подобные выражению (3.65), могут быть приближенно оценены методами теории надежности 1-го порядка, так что, например, для случая двух нагрузок можно записать

$$v^+(R) \approx \lambda_1 \Phi(-\beta_1) + \lambda_2 \Phi(-\beta_2) + \lambda_{12} \Phi(-\beta_{12}), \quad (3.214)$$

где  $\beta_i$  — индекс безопасности, если действует одна нагрузка;  $\beta_{12}$  — индекс безопасности, если действуют обе нагрузки одновременно. Индексы вычисляются с использованием распределений ликовых значений.

Далее по формуле (3.192) получаем приближенное выражение для вероятности отказа при действии двух нагрузок за период  $T$ :

$$P_f(T) \approx \Phi(-\beta_0) + T [\lambda_1 \Phi(-\beta_1) + \lambda_2 \Phi(-\beta_2) + \\ + \lambda_{12} \Phi(-\beta_{12})], \quad (3.215)$$

а при  $n$  нагрузках:

$$P_f(T) \approx \Phi(-\beta_0) + T [\sum_i \lambda_i \Phi(-\beta_i) + \sum_{i,j} \lambda_{ij} \Phi(-\beta_{ij}) + \\ + \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_{ijk} \Phi(-\beta_{ijk})], \quad (3.216)$$

где  $\beta_0$  — индекс безопасности в момент  $t=0$ , вычисляемый по распределениям текущих значений.

Индекс безопасности для периода  $0 \leq t \leq T$ .

$$\beta_v(T) = -\Phi^{-1}[P_f(T)].$$

Все приведенные выше соотношения справедливы в предположении стохастической независимости между моментами

приложения нагрузок, их интенсивностями и длительностями действия, как внутри одного процесса, так и между различными сочетаемыми процессами. Если имеет место зависимость, то пренебрегать ею в целях упрощений нужно весьма осторожно, поскольку эти упрощения могут идти не в запас прочности.

В работах Уэна и Пирса [2.17, 3.62] можно найти данные по учету стохастической зависимости между интенсивностью нагрузки и длительностью ее действия, между моментами следующих друг за другом приложений нагрузки и интенсивностями процесса, а также зависимости различных процессов.

**Пример 3.16.** Для демонстрации методики вернемся к примеру 3.15, представляя обе нагрузки трехпараметрическими импульсными процессами. Решение выполним по формуле (3.214), хотя для процесса  $S_1(t)$  не выполняется условие (2.142). Поэтому получим завышенное значение индекса безопасности и заниженное значение вероятности отказа.

Для интенсивностей обоих процессов (п. 2.4) получим:

$$\lambda_1 = 1/m_{E_1} = 1/120 \text{ сут}^{-1};$$

$$\lambda_2 = 1/m_{E_2} = 1/37,5 \text{ сут}^{-1},$$

а для среднего коэффициента совпадений двух импульсов нагрузки по времени по формуле (3.220)

$$\lambda_{12} = (60 + 0,3)/(120 \cdot 37,5) = 0,0134 \text{ сут}^{-1},$$

Применяя алгоритм Раковича—Фислера для различных сочетаний нагрузок, получим следующие значения индексов безопасности:

1) текущие значения  $S_1(t)$ :  $F_{S_1}(s) = p_1 + q_1 F_{A_1}(s)$ ,

текущие значения  $S_2(t)$ :  $F_{S_2}(s) = p_2 + q_2 F_{A_2}(s)$ ,

результат  $\beta_0 = 4,964$ ;

2) пиковые значения  $S_1(t)$ :  $F_{S_1}(s) = F_{A_1}(s)$ ,  $S_2(t) = 0$ ,

результат  $\beta_1 = 11,483$ ;

3) пиковые значения  $S_2(t)$ :  $F_{S_2}(s) = F_{A_2}(s)$ ,  $S_1(t) = 0$ ,

результат  $\beta_2 = 6,392$ ;

4) пиковые значения обеих нагрузок, результат  $\beta_{12} = 3,815$ .

Из формулы (3.224) получаем приближенное значение вероятности отказа за период  $T = 1$  год:

$$P_f(T) \approx \Phi(-4,964) + 365 \left[ \frac{1}{120} \Phi(-11,483) + \frac{1}{37,5} \Phi(-6,392) + 0,0134 \Phi(-3,815) \right] = 3,335 \cdot 10^{-4};$$

$$\beta_v(T) = -\Phi^{-1}(3,335 \cdot 10^{-4}) = 3,403.$$

Индекс безопасности на 1,2% больше, чем в примере 3.15.

**Суперпозиция процессов различных типов.** До сих пор давались решения для комбинации процессов специального вида. Однако имеется огромное число возможных комбинаций различных процессов, в особенности если имеют место импульсные процессы с формой импульса, отличной от прямоугольной, как например, показанные на рис. 2.11.

Мадсен [2.13] дал точные решения для случая суперпозиции различных процессов, основанные на формуле Райса, и получил верхние и нижние оценки коэффициентов выброса для их сумм. Эти оценки показывают, что решение (3.204) является приближением сверху и всегда идет в запас прочности. Кроме того, оказалось, что решение (3.204) является точным, если условие

$$P[S_1(t) > 0 \cap S_2(t) < 0] = 0 \quad (3.217)$$

выполняется для всех моментов времени  $t$  [2.14]. Это условие означает, что не может при многих процессах один процесс нарастать, а другой одновременно падать. Во многих практических комбинациях нагрузок это условие выполняется (рис. 3.26). С помощью выражений для коэффициентов выброса отдельных процессов, приведенных в п. 2.4, можно по формуле (3.204) решать проблему сочетания нагрузок для всех наиболее важных процессов по единым принципам или точно, или с приближением, которое идет в запас.

Из рассмотрения формулы (3.123) можно заключить, что для решения проблемы сочетания нагрузок необходимо и достаточно знание только двух функций — коэффициента выброса  $v^+$  и плотности распределения  $f_S$  текущих значений отдельных процессов. Вся другая информация излишня.

Если даны какие-то другие функции, то из них следует определить  $v^+$  и  $f_S$ . При известном распределении экстремальных значений нагрузки за рассматриваемый период времени  $v^+(r)$  для высоких уровней  $r$  можно найти по выражению (2.115). При известном распределении пиковых значений  $f_S$  отдельных состояний нагрузки по результатам статистических исследований  $v^+(r)$  для прямоугольных импульсов находится по формуле (2.134), а для треугольных — по формуле (2.135). Необходимые соотношения для многих других форм импульсов можно найти у Мадсена [2.13].

Плотность распределения текущих значений  $f_S$  при известных форме импульса и вероятности  $p$  аналитически вычисляется по распределению пиковых значений  $f_S$ . Однако целесообразнее определять  $f_S$  непосредственно по статистическим данным, тогда не требуется знания формы импульса.

Что касается длительности импульса, то следует знать только среднее, трудно оцениваемое распределение вероятностей не нужно.

**Правило Туркстры.** Приближенное решение для суперпозиции случайных процессов, которое легло в основу правил

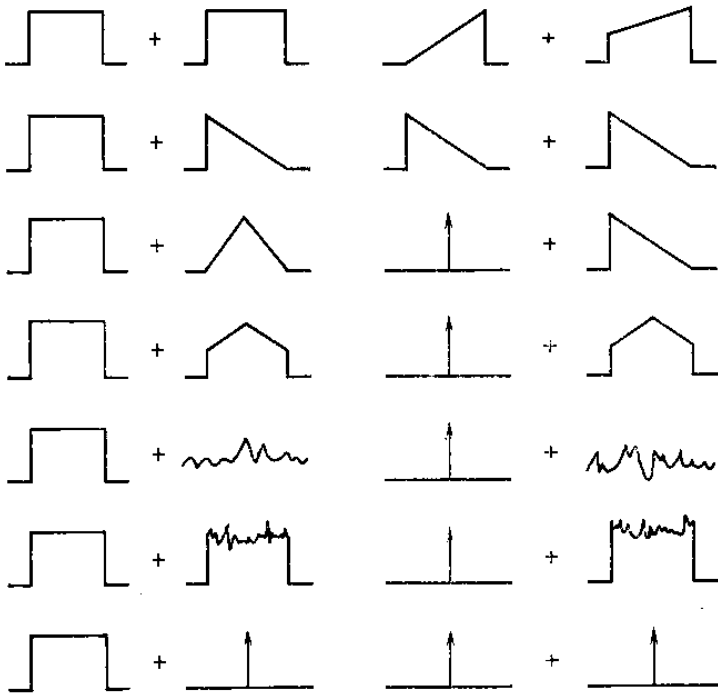


Рис. 3.26. Примеры сочетаний процессов нагружения, для которых выражение (3.213) является точным решением

сочетания нагрузок в нормах многих стран предложил Туркстра [3.63].

Предполагается, что максимальное значение суммы может появляться только в те моменты, когда один из процессов имеет максимальное значение (рис. 3.27).

Таким образом, исследование сводят к  $n$  дискретным моментам. Для этого делается суперпозиция того или иного распределения экстремальных значений с соответствующими распределениями текущих значений и из этих комбинаций вы-

бирается максимальная величина. Для суммы  $n$  нагрузок имеем:

$$\begin{aligned} & \max_T \{S_1(t) + \dots + S_m(t)\} \approx \\ & \approx \max \begin{cases} \max_T S_1(t) + S_2(t^*) + \dots + S_m(t^*) \\ S_1(t^*) + \max_T S_2(t) + \dots + S_m(t^*) \\ \vdots \\ S_1(t^*) + S_2(t^*) + \dots + \max_T S_m(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.218)$$

где  $t^*$  — произвольный момент времени в интервале  $[0, T]$ .

По этому правилу надежность конструкции проверяется только в те моменты времени, когда одна из нагрузок достигает максимального значения.

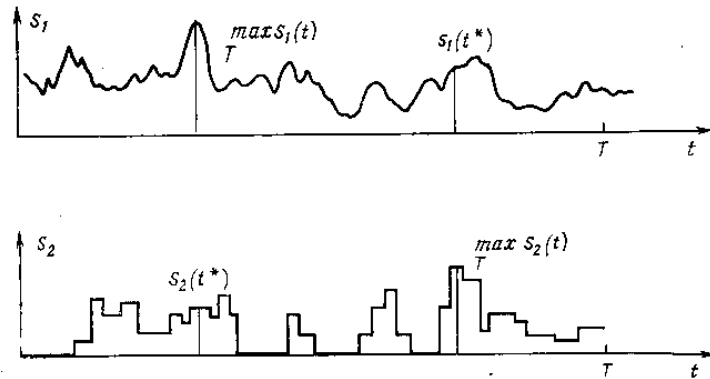


Рис. 3.27. Правило Туркстры для двух процессов

Правило Туркстры можно приближенно получить, используя формулы (3.204) и (3.205). Покажем это для двух процессов. Подставляя в формулу (3.204) приближенное соотношение (2.114) между распределением экстремальных значений и коэффициентом выброса

$$\begin{aligned} G_{\max S}(r) = 1 - F_{\max S}(r) & \approx 1 - \exp[-v^+(r)T] \approx \\ & \approx v^+(r)T, \end{aligned} \quad (3.219)$$

получаем:

$$G_{\max \{S_1+S_2\}} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\max S_1}(r-s) f_{S_2}(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} G_{\max S_2}(r-s) f_{S_1}(s) ds. \quad (3.220)$$

Последнее выражение в точности соответствует правилу Туркстры. Это ясно, если учесть, что для независимых случайных величин  $X_1, X_2$  и  $U=X_1+X_2$  имеет место  $G_U(r) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{X_1}(r-s) f_{X_2}(s) ds$ , а для  $U=\max(X_1, X_2)$  с учетом формул (2.5) и (2.6)  $G_U(r) = G_{X_1}(r) + G_{X_2}(r) - G_{X_1}(r) G_{X_2}(r)$ , для высоких уровней  $r$  получаем:

$$G_U(r) \approx G_{X_1}(r) + G_{X_2}(r). \quad (3.221)$$

Приближение (3.219) приемлемо только для высоких уровней  $r$ , но интегрирование в выражении (3.220) ведется по всем значениям. К счастью, при низких пороговых значениях все множители в интегралах свертки малы, так что в общем приближение оказывается достаточно близким.

Обе величины ( $\max S_1+S_2$ ) и  $(S_1+\max S_2)$ , естественно, не являются стохастически независимыми, следовательно, выражение (3.221) также приближенное. Все эти допущения, которые необходимы для вывода правила Туркстры, не позволяют судить о том, ведет ли это правило к запасу или нет. Но решения практических задач показывают, что за счет использования правила Туркстры надежность завышается.

Правило Туркстры подтверждается опытом и наблюдением, поскольку случаи отказа большей частью возникают в тех случаях, когда одна из нагрузок достигает экстремального значения, и очень редко, когда действует комбинация нескольких различных нагрузок, изменяющихся во времени.

*Пример 3.17.* Снова найдем значение индекса  $\beta$  для условий примера 3.15 используя правило Туркстры. Для этого применим алгоритм Раковца—Филлера для решения в двух случаях:

- 1) текущие значения  $S_1(t)$ :  $F_{S_1}(s) = p_1 + q; F_{S_1}(s)$ .
- 2) экстремальные значения  $S_2(t)$ :  $F_{\max S_2}(s) = [F_{S_2}(s)]^{n_2}$ .

где  $n_2$  — среднее число импульсов за время  $T$ :

$$n_2 = 365/37,5 = 9,733,$$

результат  $\beta = 3,386$ ;

- 1) экстремальные значения  $S_1(t)$ :  $F_{\max S_1}(s) = [F_{S_1}(s)]^{n_1}$ ,

где  $n_1 = 365/120 = 3,042$ ,

- 2) текущие значения  $S(t)$ :  $F_{S_2}(s) = p_2 + q; F_{S_2}(s)$ .

результат  $\beta = 4,712$ .

Приближенное значение  $\beta_V = -\Phi^{-1} [\Phi(-3,386) + \Phi(-4,712)] = 3,386$  на 0,7% превосходит более точное значение  $\beta_V$ , полученное в примере 3.15.

**Отказ за счет усталости материала.** Во многих элементах конструкций, которые за срок существования подвергаются часто меняющимся нагрузениям, могут накапливаться повреждения материала, ведущие к внезапному усталостному разрушению. При этом разрушение может произойти в такой момент, когда действуют не слишком большие напряжения. Точно предсказать момент разрушения, очевидно, невозможно, в лучшем случае, можно говорить о вероятности его появления.

Определение вероятности отказа или индекса безопасности при усталости за счет регулярно и случайно меняющихся напряжений можно провести на основе данных опыта о поведении материала при циклическом нагружении с постоянной амплитудой и гипотезы о накоплении усталостных повреждений. Последняя сводит явления усталости при сложных историях нагружения к известному характеру поведения материала под нагрузкой с постоянной амплитудой.

Далее будет показано применение теории надежности 1-го порядка к определению вероятности отказа и индекса безопасности на основе гипотезы линейного накопления повреждений, предложенной Пальмгреном и Майнером.

Нагрузке, представленной циклическим воздействием, которое отражает частоту ожидаемых эксплуатационных напряжений в элементе, противостоит сопротивление в зависимости от формулировки задачи, материала, вида детали конструкции, характеризуемое линией Велера, определенной из эксперимента при циклическом нагружении с постоянной амплитудой. Линия Велера обычно представляет собой прямую в логарифмической системе координат (рис. 3.28)

$$N_L = N_D \left( \frac{\Delta \sigma_D}{\Delta \sigma} \right)^{\varphi}$$

где  $\Delta \sigma_D$  — усталостная прочность при  $N_D$  (обычно  $2 \cdot 10^6$ ) цикла напряжений;  $N_L$  — число циклов до разрушения при испытаниях с двойной амплитудой напряжений  $\Delta \sigma$ ;  $\varphi$  — угол наклона линии Велера.

Эта зависимость от перепада напряжений (двойной амплитуды)  $\Delta \sigma$  отражает сегодняшний уровень знаний, когда пред-

полагается, что развитие усталостного процесса определяется именно перепадом напряжений в пределах одного цикла.

Определим некоторое абстрактное повреждение  $D$ , которое сначала равно нулю, а к моменту разрушения увеличивается до предельного повреждения  $D_{gr}$ . Пусть в некотором эксперименте с постоянной амплитудой циклических нагрузений  $D_{gr} = 1$ . Тогда каждый цикл напряжений  $\Delta\sigma(t)$  вызывает

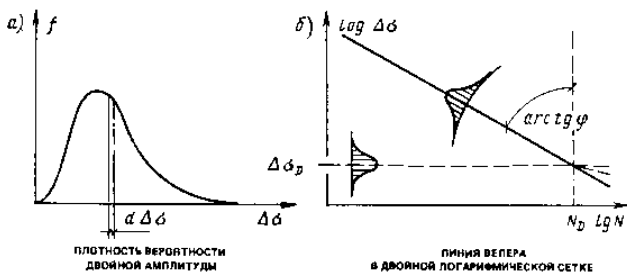


Рис. 3.28. Напряжение и сопротивление при усталости  
а — напряжение; б — сопротивление

дополнительное повреждение  $\Delta D$ . Эта величина определяется по уравнению линии Велера:

$$\Delta D(\Delta\sigma) = \frac{1}{N_L(\Delta\sigma)\Psi} \quad (3.222)$$

Отдельные повреждения складываются в соответствии с линейной гипотезой накопления, причем общее повреждение является монотонно возрастающей случайной функцией времени

$$D(t) = \sum \Delta D(\Delta\sigma)$$

Если  $N_L$  — число циклов нагружения до момента  $t$ , то с учетом плотности распределения амплитуды напряжений, получаем:

$$D(t) = \int_0^{\infty} \frac{N(t)f(\Delta\sigma)}{N_L(\Delta\sigma)} d\Delta\sigma$$

Вводя сюда уравнение линии Велера, найдем:

$$D(t) = \frac{N(t)}{N_D \Delta\sigma_D^\Psi} \int_0^{\infty} f(\Delta\sigma) \Delta\sigma^\Psi d\Delta\sigma \quad (3.223)$$

Отказ наступает в том случае, если повреждение превысит граничное значение  $D_{gr}$  (рис. 3.29)

$$P_f(t) = P[D(t) > D_{gr}] = P[D_{gr} - D(t) < 0]$$

Интерес представляет, конечно, вероятность отказа в течение срока службы  $T$ :

$$P_f(T) = P[D_{gr} - D(T) < 0] \quad (3.224)$$

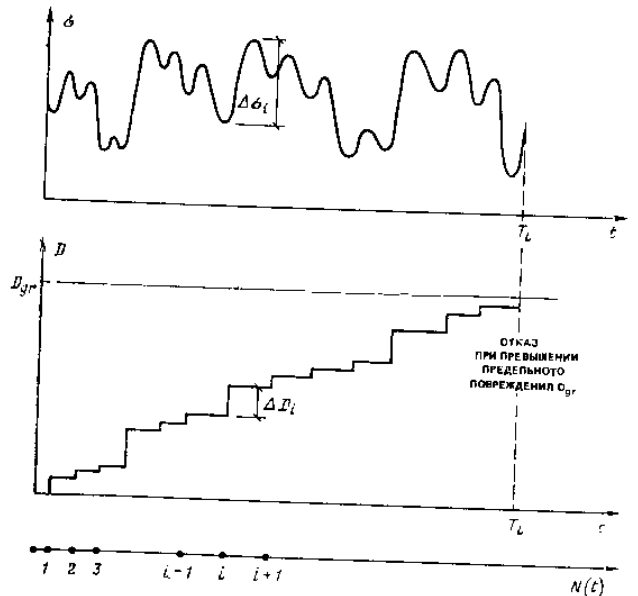


Рис. 3.29. Реализация процесса циклических напряжений и соответствующее им накопление повреждений (по работе [3.64])

Таким образом, задача сведена к основной задаче (3.22) с уравнением предельного состояния в виде:

$$g = D_{gr} - \frac{N(t)}{N_D \Delta\sigma_D^\Psi} \int_0^{\infty} f(\Delta\sigma) \Delta\sigma^\Psi d\Delta\sigma \quad (3.225)$$

Для ее решения могут быть применены все вышеизложенные методы, в особенности методы теории надежности 1-го порядка с определением вероятности отказа или индекса безопасности. Уравнение предельного состояния несколько слож-

нее ранее рассмотренных в связи с появлением в нем интеграла, который представляет собой  $\varphi$ -й момент распределения двойной амплитуды  $\Delta\sigma$ .

Возможно и замкнутое решение для некоторых типов распределений. При этом всегда следует иметь в виду, что могут быть необходимы решения и для нецелочисленного значения  $\varphi$ , поскольку этот параметр как угол наклона линии Велера является действительным числом. Он является случайной величиной при оценке вероятности отказов и индекса безопасности.

Если, например,  $\Delta\sigma$  подчиняется закону распределения экстремальных значений типа III с наименьшим значением  $x_0=0$  (распределение Вейбулла) с плотностью

$$f(\Delta\sigma) = \lambda k \Delta\sigma^{k-1} \exp(-\lambda\Delta\sigma^k), \quad (3.226)$$

$$\int_0^{\infty} f(\Delta\sigma) \Delta\sigma^{\varphi} d\Delta\sigma = \lambda^{-\varphi/k} \Gamma(1+\varphi/k). \quad (3.227)$$

Некоторые другие случаи рассмотрены в работах [3.65, 3.66].

Такие замкнутые решения возможны в предположении, что  $\varphi$  не является функцией  $\Delta\sigma$ , т. е. линия Велера — прямая вплоть до уровня  $\Delta\sigma=0$  (гипотеза Кортена и Долана [3.68]). Если же линия Велера имеет перелом на уровне предела выносливости (гипотеза малости повреждений при напряжениях ниже предела выносливости: Хайбах [3.69]) или она горизонтальна (гипотеза отсутствия повреждений при напряжениях, равных или меньших предела выносливости; Майнер [3.70]), то неизбежно применение приемов численного интегрирования. Для этого нужны ЭВМ большой производительности, поскольку численное интегрирование при решении задачи методами теории надежности 1-го порядка требуется на каждом шаге итераций.

Случайные разбросы учитываются для линии Велера двумя случайными величинами — пределом усталости  $\Delta\sigma_D = X_1$  и углом наклона  $\varphi = X_2$ . Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что распределение обеих величин весьма близко к логнормальному. Для стальных конструкций Квель и Гайндер [3.71] дали средние и стандартные отклонения для  $X_1$  и  $X_2$  при различных видах концентраторов напряжений. Для концентратора одного и того же вида по данным работы [3.71] отсутствует стохастическая зависимость между  $X_1$  и  $X_2$ , в то время как Респермунд [3.65] получил обратный результат.

Гипотеза линейного накопления повреждений является относительно простым эмпирическим представлением сложных

механических процессов, происходящих при усталостном разрушении под действием случайных нагрузок. Несмотря на ограниченность гипотеза Майнера оказалась весьма полезной и получила широкое распространение в приложениях. Если в основу оценки вероятности отказа кладется линейная гипотеза Майнера, то представляется целесообразным учесть несовершенство механической модели введением третьей случайной величины, полагая случайную степень предельных повреждений (называемой также коэффициентом Майнера)  $D_{gr} = X_3$ . В работе [3.66] представлены результаты различных авторов по исследованию изменчивости  $D_{gr}$ . На основе этих данных можно принять для  $D_{gr}$  среднее, равным 1, и коэффициент вариации 0,65. Чаще всего представляет интерес вероятность отказа в течение срока службы  $T$ . В этом случае число циклов напряжений в течение времени  $T$  также является случайной величиной  $N(T) = X_4$ . Эта величина оценивается в зависимости от условий эксплуатации элемента на основе прогноза.

При решении проблемы усталости необходимо учесть и случайный характер нагружения. Этого можно добиться, рассматривая параметры распределения напряжений  $f(\Delta\sigma)$  как случайные величины. В таком случае уравнение предельного состояния со случайными величинами  $X_i$  принимает вид:

$$g(x) = X_3 - \frac{X_4}{N_D X_1^{\varphi}} \int_0^{\infty} f(\Delta\sigma, X_5, \dots) \times \Delta\sigma^{X_2} d\Delta\sigma. \quad (3.228)$$

Решая его методами теории надежности, находим вероятность отказа и индекс безопасности при явлениях усталости [3.72].

**Пример 3.18.** Сварной шов за время службы подвергается случайной последовательности циклических напряжений с двойной амплитудой  $\Delta\sigma$ . Определить вероятность отказа и индекс безопасности в случае усталостного разрушения при следующих предположениях:

двойные амплитуды циклов нагружений подчиняются распределению Вейбулла (экстремальное распределение минимальных значений типа III) со средним  $m_{\Delta\sigma} = 30$  Н/мм<sup>2</sup> и стандартным отклонением  $\sigma_{\Delta\sigma} = 60$  Н/мм<sup>2</sup> ( $x_0=0$ );

справедлива гипотеза Кортена—Долана, т. е. линия Велера является прямой вплоть до  $\Delta\sigma=0$ ;

предел усталости  $\Delta\sigma_D = X_1$  при  $N_D = 2 \cdot 10^6$  циклах напряжений распределен логнормально со средним  $m_{X_1} = 243$  Н/мм<sup>2</sup> и стандартным отклонением  $\sigma_{X_1} = 59$  Н/мм<sup>2</sup>;

угол наклона линии Велера  $\varphi = X_2$  является логнормальной случайной величиной со средним  $m_{X_2} = 4,88$  и стандартным  $\sigma_{X_2} = 2,22$  отклонением; предельное повреждение  $D_{gr}$  принимается для учета неточностей мо-

дели, основанной на гипотезе Майнера, случайной величиной  $X_3$  с логнормальным распределением, средним  $m_{X_3}=1$  и стандартным  $\sigma_{X_3}=0.65$  отклонением:

число циклов нагружений за время срока службы  $T$  не может быть предсказано с полной определенностью и считается случайной величиной  $N(T)=X_4$  с логнормальным распределением, средним  $m_{X_4}=10\,000$  и стандартным  $\sigma_{X_4}=3000$  отклонением.

С учетом формулы (3.227) условие наступления усталостного разрушения (3.228) принимает вид:

$$g(x) = X_3 - \frac{X_4}{2 \cdot 10^6 X_1^{X_2}} \lambda^{-X_2/k} \Gamma\left(1 + \frac{X_2}{k}\right).$$

Сначала определяются параметры  $\lambda$  и  $k$  для распределения Вейбулла по среднему и стандартному отклонению. Из трансцендентного уравнения для коэффициента вариации (см. табл. 8 прил. II)

$$\frac{[\Gamma(1+2/k) - \Gamma^2(1+1/k)]^{1/2}}{\Gamma(1+1/k)} = v = \frac{60}{300} = 0,2$$

методом Ньютона находим  $k=5,79769$ . Из выражения для среднего распределения Вейбулла

$$m = \frac{1}{\lambda^{1/k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

следует:

$$\lambda = \left[ \frac{1}{m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^k = \left( \frac{1}{300} \Gamma \cdot 1,17248 \right)^{5,79769} = 2,784203 \cdot 10^{-15}.$$

Таким образом, полностью определено уравнение предельного состояния. Используя алгоритм, получаем случайные величины для каждого шага итерационного процесса и сводим их в таблицу. В качестве начального был выбран вектор  $y^{(0)}=0$ . Производные заменялись конечными разностями с  $\Delta y=0,0001$ .

$k$	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	$y_4^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0	0	—
1	-0,0633	0,0414	-1,6446	0,0175	1,646
2	-0,3651	0,2501	-3,1688	0,0990	3,201
3	-1,6842	1,4028	-3,1308	0,4173	3,844
4	-1,0397	1,5692	-0,0172	0,1563	1,889
5	-1,1235	1,4002	-0,2754	0,1571	1,823
6	-1,1000	1,3924	-0,3227	0,1655	1,811
7	-1,1038	1,3851	-0,3364	0,1667	1,811
8	-1,1031	1,3853	-0,3378	0,1671	1,810
9	-1,1032	1,3852	-0,3379	0,1671	1,810

Для  $k_9$  находим  $\beta=1,810$ ;  $\alpha_1=0,6094$ ;  $\alpha_2=-0,7651$ ;  $\alpha_3=0,1866$ ;  $\alpha_4=-0,0923$ ;  $P_f=3 \cdot 51 \cdot 10^{-2}$ .

примечательно, что несмотря на очень большую изменчивость предельного повреждения (коэффициент вариации 0,65) и большой разброс числа циклов за срок службы (коэффициент вариации 0,30), эти случайные величины оказали очень небольшое влияние на результат. Это видно из коэффициентов чувствительности  $\alpha_i$ . Решающим является характер и наклон линии Велера.

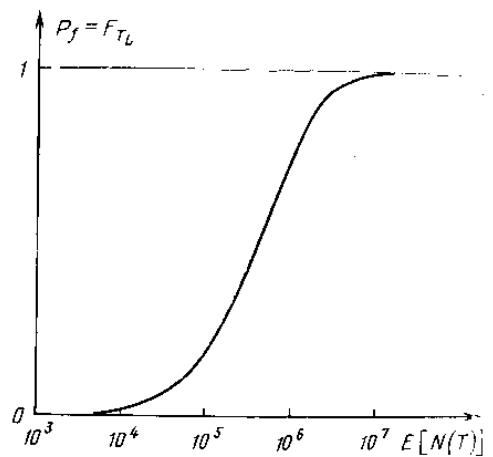


Рис. 3.30. Изменение во времени вероятности отказа, равное функции распределения срока существования

Если выполнить подобные решения для различных математических ожиданий числа циклов нагружений  $m_{X_4} = E[N(T)]$ , то получим представленную на рис. 3.30 кривую вероятности отказа. Она же представляет собой функцию распределения срока существования сварного шва.

### 3. ОТКАЗ СИСТЕМ С МНОГИМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

#### Основные положения

Выше рассматривалась вероятность отказа по одному единственному предельному состоянию. Однако в статистических системах возможность отказа может быть по нескольким состояниям. Конструкции, состоящие из нескольких элементов, могут иметь многие механизмы отказа и выходить из строя по различным критериям (например, потеря устойчивости, разрушение, текучесть).

Пусть дана статическая система, которая может отказаться по  $n$  предельным состояниям. Тогда получаем систему из  $n$  уравнений предельных состояний:



$$\left. \begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0; \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0. \end{aligned} \right\} (3.229)$$

Если  $X_i$  случайные величины, то  $n$  запасов прочности также являются случайными величинами:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= g_1(X_1, X_2, \dots, X_m); \\ &\vdots \\ Z_n &= g_n(X_1, X_2, \dots, X_m). \end{aligned} \right\} (3.230)$$

В теории надежности различают два основных типа систем — системы с последовательным соединением элементов и системы с параллельным соединением.

Система с последовательным соединением отказывает в тех случаях, когда превзойдено какое-либо из  $n$  предельных состояний, т. е. или  $g_1(x) < 0$ , или  $g_2(x) < 0, \dots$  или  $g_n(x) < 0$ . Система отказывает, если один из  $n$  запасов прочности становится отрицательным — отказывает ее слабейший элемент.

Напротив, система с параллельным соединением отказывает в тех случаях, когда превзойдены все  $n$  предельных состояний, т. е. и  $g_1(x) < 0$ , и  $g_2(x) < 0, \dots$  и  $g_n(x) < 0$ . Система отказывает, если все запасы прочности становятся отрицательными — отказывают все ее элементы, включая и самый прочный.

Комбинация параллельных и последовательных систем дает смешанную систему.

Преобладающее большинство статических систем по теории надежности ведут себя как системы последовательно соединенных элементов. Это справедливо для статически определимых систем. Но и статически неопределимые системы можно рассматривать как последовательные, если их элементы обладают достаточной пластичностью.

Параллельное следование элементов по теории надежности имеет место в статически неопределимых системах с упруго-хрупким поведением материала. В статически неопределимых системах, смотря по тому, как рассматривается предельное состояние, возможно как последовательное, так и параллельное следование элементов.

Для механических систем характерно, что отдельные предельные состояния стохастически зависят друг от друга. Даже если все базисные переменные  $X_i$  взаимно независимы, возникает зависимость запасов прочности  $Z_k$  различных предельных состояний, когда в системе уравнений (3.220) одно из  $X_i$  входит в различные предельные состояния. Это, как

правило, имеет место на практике. Если, например, большие величины внутренних усилий в различных частях конструкции возникают вследствие высокого уровня нагрузки, одновременно появляются низкие запасы прочности по многим предельным состояниям.

Ковариация между запасами прочности для предельного состояния  $j$  и  $k$  находится из выражений (2.82) и (3.230):

$$\text{Cov}[Z_j, Z_k] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (g_j(x) - E[g_j(X)]) \times (g_k(x) - E[g_k(X)]) f_X(x) dx. \quad (3.231)$$

Коэффициент корреляции

$$\rho_{Z_j, Z_k} = \frac{\text{Cov}[Z_j, Z_k]}{\sigma_{Z_j} \sigma_{Z_k}}$$

где  $\sigma_{Z_k}$  определяется по формуле (3.80). Вновь рассмотрим особый случай линейных уравнений предельного состояния:

$$g_j(x) = c_{j0} + \sum_i c_{ji} x_i = c_{j0} + c_j^T x;$$

$$g_k(x) = c_{k0} + \sum_i c_{ki} x_i = c_{k0} + c_k^T x.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.231), найдем с учетом зависимости (3.81)

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z_j, Z_k] &= \sum_i c_{ji} c_{ki} \text{Var}[X_i] + \\ &+ \sum_{\substack{i, l \\ i \neq l}} c_{ji} c_{kl} \text{Cov}[X_i, X_l] = \sum_i \times \\ &\times c_{ji} c_{ki} \sigma_{X_i}^2 + \sum_{\substack{i, l \\ i \neq l}} c_{ji} c_{kl} \times \\ &\times \sigma_{X_i} \sigma_{X_l} \rho_{X_i X_l} \end{aligned} \quad (3.232)$$

или в матричной форме

$$\text{Cov}[Z_j, Z_k] = c_k^T C_X c_j, \quad (3.233)$$

где матрица ковариаций  $C_X$  случайных величин  $X_i$  определяется по формуле (2.85). В случае независимости  $X_i$  матрица  $C_X$  диагональная.

Если уравнения предельных состояний нелинейны, то ковариация может быть представлена в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности среднего значения:

$$\text{Cov}[Z_j, Z_k] = G_j^T(m) C_X G_k(m), \quad (3.234)$$

где вектор  $G$  определяется по формуле (3.88).

**Пример 3.19.** Балка (рис. 3.31) нагружена двумя стохастически независимыми нагрузками  $X_1$  и  $X_2$ . Средние и стандартные отклонения нагрузок составляют:

$$m_{X_1} = 18 \text{ кН}; m_{X_2} = 10 \text{ кН/м}; \sigma_{X_1} = 2 \text{ кН}; \sigma_{X_2} = 3 \text{ кН/м}; \\ \text{Cov} [X_1, X_2] = 0.$$

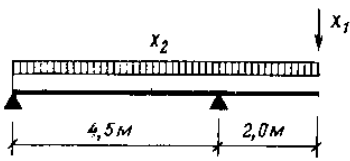


Рис. 3.31. К примеру 3.19

Следует определить средние и стандартные отклонения, а также коэффициент корреляции изгибающего момента и поперечной силы в сечении над опорой. Из уравнений равновесия  $M=2X_1+2X_2$  и  $Q=X_1+2X_2$  по формуле (3.82) найдем средние и стандартные отклонения:

$$m_M = 2m_{X_1} + 2m_{X_2} = 2 \cdot 18 + 2 \cdot 10 = 56 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$m_Q = m_{X_1} + 2m_{X_2} = 18 + 2 \cdot 10 = 38 \text{ кН};$$

$$\sigma_M = \sqrt{2^2 \sigma_{X_1}^2 + 2^2 \sigma_{X_2}^2} = 7,211;$$

$$\sigma_Q = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + 2^2 \sigma_{X_2}^2} = 6,325.$$

Ковариация по формуле (3.232) составит:

$$\text{Cov} [M, Q] = 2 \cdot 1 \sigma_{X_1}^2 + 2 \cdot 2 \sigma_{X_2}^2 = 44;$$

коэффициент корреляции

$$\rho_{MQ} = \frac{\text{Cov} [M, Q]}{\sigma_M \sigma_Q} = 0,965.$$

Хотя  $X_1$  и  $X_2$  независимы, результирующие внутренние усилия очень сильно коррелированы.

Коэффициент  $\rho_{MQ}$  лишь немногим меньше единицы. Это типично для механических систем, в которых часто коррелируют внутренние усилия и запасы прочности для различных предельных состояний. Это обстоятельство существенно осложняет расчет механических систем со многими вариантами отказа.

В учебниках по общей теории надежности (например, [3.73—3.75]) можно найти хорошо разработанную теорию систем со стохастически независимыми элементами. Однако эта

теория или вообще неприменима, или применима только в особых случаях для механических систем.

Рассмотрим основные зависимости для определения вероятности отказа в последовательных и параллельных системах с зависимыми элементами.

Последовательная система отказывает в целом, если она отказывает по одному из  $n$  предельных состояний. Тогда область отказа в исходном пространстве базисных переменных представляет собой объединение областей отказов по отдельным предельным состояниям:

$$V = \{x \mid [g_1(x) < 0] \cup [g_2(x) < 0] \cup \dots \cup [g_n(x) < 0]\}, \\ V = \{x \mid \bigcup_{i=1}^n [g_i(x) < 0]\}, \quad (3.235)$$

а область безотказной работы характеризуется пересечением областей для отдельных предельных состояний:

$$S = \{x \mid \bigcap_{i=1}^n [g_i(x) \geq 0]\}. \quad (3.236)$$

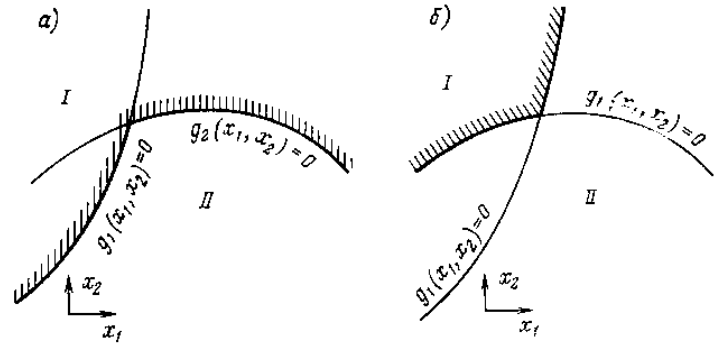


Рис. 3.32. Области отказа и безотказной работы для системы с двумя случайными величинами ( $m=2$ ) и двумя предельными состояниями ( $n=2$ ) (векторные величины подчеркнуты)

а — последовательная система; б — параллельная система; I — область отказа; II — область безотказной работы

Из рис. 3.32 видно, что уравнение предельного состояния отказа системы уже нельзя представить в простой аналитической форме, а необходимо набирать из отдельных отрезков кривых предельных состояний отказов элементов. Это уравнение не дифференцируемо во всех точках.

По правилам теории вероятностей вероятность отказа системы последовательно соединенных элементов представляет собой интеграл от плотностей распределения базисных переменных  $X_i$  по области отказа системы:

$$P_f = \int_{\{x | \bigcap_{j=1}^n [g_j(x) < 0]\}} \dots \int f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) \times dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (3.237)$$

Во многих случаях целесообразнее интегрировать по области безопасной работы

$$P_f = 1 - \int_{\{x | \bigcap_{j=1}^n [g_j(x) \geq 0]\}} \dots \int f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) \times dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (3.238)$$

Аналогичные выражения получим для системы параллельно соединенных элементов:

$$\left. \begin{aligned} V &= \{x | \bigcap_{j=1}^n [g_j(x) < 0]\}; \\ S &= \{x | \bigcup_{j=1}^n [g_j(x) \geq 0]\}; \end{aligned} \right\} \quad (3.239)$$

$$P_f = \int_{\{x | \bigcap_{j=1}^n [g_j(x) < 0]\}} \dots \int f_X(x_1, x_2, \dots, x_m) \times dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (3.240)$$

Точное интегрирование для отдельных предельных состояний уже представляет собой практически неразрешимую задачу, тем более эта задача сложна для случая системы предельных состояний. Поэтому теория стремится дать простые выражения верхних и нижних оценок вероятности отказа системы и индекса безопасности  $P_f$  и  $\beta$  для отдельных предельных состояний.

Ниже рассматриваются частные случаи, где возможны простые решения, а затем даются границы для  $P_f$  и  $\beta$  в общем случае. При этом ограничиваемся рассмотрением последовательной системы, поскольку она имеет большее значение для проблем механики. Параллельные и смешанные системы описаны в работах [3.78, 3.79, 3.80].

### Частные случаи

**Запасы прочности для предельных состояний стохастически независимы.** Этот случай имеет место, если, во-первых, базисные переменные  $X_j$  не зависят друг от друга и, во-вторых, каждое из них входит только в одно уравнение предельного состояния, т. е., например, система (3.230) имеет вид:  $Z_1 = g_1(X_1, X_2)$ ;  $Z_2 = g_2(X_3, X_4)$  и т. д.

В реальных сооружениях едва ли можно встретить этот случай, поскольку внешняя нагрузка вызывает напряжения во всех элементах и сечениях. Однако такой случай необходимо рассмотреть как верхнюю оценку вероятности отказа для общего случая системы последовательно соединенных элементов.

Интеграл (3.238) распадется на произведение более простых интегралов для отдельных предельных состояний. Покажем это для случая, когда уравнения предельных состояний можно представить в виде  $g_j(x_i, x_{i+1}) = r_j - s_j$ . Тогда из формулы (3.247) следует:

$$\begin{aligned} P_f &= 1 - \int_{\{r_j, s_j | \bigcap_j [r_j - s_j \geq 0]\}} \prod_j [f_{R_j}(r_j)] \times \\ &\quad \times f_{S_j}(s_j) dr_j ds_j = 1 - \prod_j \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \times \\ &\quad \times f_{R_j}(r_j) f_{S_j}(s_j) dr_j ds_j = \\ &= 1 - \prod_{j=1}^n (1 - P_{f_j}), \end{aligned} \quad (3.241)$$

где  $P_{f_j}$  — вероятность отказа по предельному состоянию в соответствии с формулой (3.64).

Выражение (3.241) непосредственно следует и из формулы (2.11). Оно представляет важную зависимость в теории надежности систем с независимыми элементами и утверждает, что в последовательных системах вероятности безотказной

работы перемножаются:  $P_b = \prod_{j=1}^n P_{b_j}$ .

Если вероятности отказа для отдельных предельных состояний достаточно малы, то выражение (3.241) можно представить в виде:

$$P_f \approx \sum_{j=1}^n P_{f_j}, \quad (3.242)$$

причем ошибка приближения не превышает

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n P_{f_j} \right)^2.$$

Если в качестве меры безопасности рассматривается индекс безопасности, то можно ввести обобщенный индекс безопасности системы  $\beta_{sys}$ , который вычисляется по индексам безопасности  $\beta_j$  для отдельных предельных состояний:

$$\beta_{sys} = -\Phi^{-1} [1 - \prod_{j=1}^n \Phi(\beta_j)] \approx -\Phi^{-1} [\sum_{j=1}^n \Phi(-\beta_j)]. \quad (3.243)$$

**Статически определимые системы со стохастически независимыми характеристиками свойств материала элементов под нагрузкой  $S$ .** В статически определимых системах внутреннее усилие в различных сечениях прямо пропорционально внешней нагрузке  $S$ . Пусть  $\kappa_j S$  — внутреннее усилие в элементе  $j$ , причем  $\kappa_j$  представляет собой коэффициент, определяемый методами механики для предельного состояния  $j$ . Рассмотрим предельный случай, когда сопротивления  $R_j$  элементов  $j$  не зависят друг от друга, и применим выражение (3.238):

$$P_f = 1 - \int_{(r_j, s_j | r_j - \kappa_j s \geq 0)} \dots \int f_{R_1}(r_1) \dots \dots \int f_{R_n}(r_n) f_S(s) dr_1 \dots dr_n ds =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^n [f_{R_j}(r_j) dr_j] \right\} f_S(s) ds.$$

Внутренние интегралы определяются непосредственно, и можно записать относительно просто вычисляемое выражение:

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^n [1 - F_{R_j}(\kappa_j s)] \right\} f_S(s) ds. \quad (3.244)$$

Если сравнить его с формулами для вычисления функции распределения наименьших значений независимых испытаний, то легко увидеть, что выражение  $1 - \prod_{j=1}^n [1 - F_{R_j}(\kappa_j s)]$

представляет собой не что иное, как функцию распределения минимального значения внутреннего сопротивления всех рассматриваемых поперечных сечений, которые находятся под действием внешней силы  $S$ . Если обозначить функцию распределения  $F_{\min R}(s)$ , то выражение (3.244) переходит в простое соотношение (3.64) для  $R-S$  модели:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\min R}(s) f_S(s) ds. \quad (3.245)$$

**Пример 3.20.** Цепь из 100 элементов нагружена продольной силой  $S$ , распределенной по нормальному закону. Прочности на разрыв отдельных элементов цепи независимы друг от друга и также подчиняются нормальному закону. Какова вероятность отказа и индекс безопасности при заданных на рис. 3.33 параметрах?

По формуле (3.244) получаем:

$$P_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{s - m_R}{\sigma_R} \right) \right]^{100} \frac{1}{\sigma_S} \Phi \times$$

$$\times \left( \frac{s - m_S}{\sigma_S} \right) ds.$$

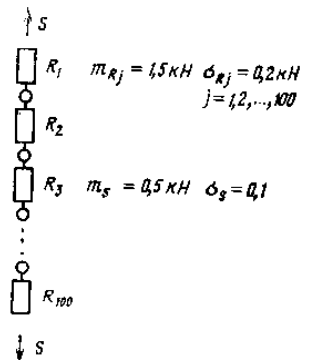


Рис. 3.33. К примеру 3.20 ( $R_j$  и  $S$  независимы и нормально распределены)

Численное интегрирование по правилу Симпсона дает:

$$P_f = 3,845 \cdot 10^{-4}; \quad \beta_{sys} = 3,364.$$

Для сравнения решим эту же задачу по формуле (3.241) в предположении независимости запасов прочности. По выражению (3.66) находим вероятность отказа одного элемента цепи

$$P_{f1} = \Phi \left( - \frac{m_{R1} - m_S}{\sqrt{\sigma_{R1}^2 + \sigma_S^2}} \right) =$$

$$= \Phi \left( - \frac{1,5 - 0,5}{\sqrt{0,2^2 + 0,1^2}} \right) = 3,876 \cdot 10^{-1},$$

а для всей цепи

$$P_f = 1 - (1 - 3,876 \cdot 10^{-1})^{100} = 3,875 \cdot 10^{-4}; \quad \beta_{sys} = 3,362.$$

Соотношение этих двух решений такое хорошее, поскольку коэффициент корреляции для различных запасов прочности

$$\rho_{Z_j, Z_k} = \frac{\text{Cov}[Z_j, Z_k]}{\sigma_{Z_j} \sigma_{Z_k}} = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_{R_j}^2 + \sigma_S^2} = \frac{0,1^2}{0,2^2 + 0,1^2} = 0,2$$

относительно мал.

Статически определимые системы с функционально зависимыми характеристиками свойств материала элементов под нагрузкой  $S$ . Если только что мы исследовали предельный случай стохастической независимости свойств материала ( $\rho=0$ ), то теперь рассмотрим противоположный случай полной функциональной зависимости характеристик материала ( $\rho=1$ ).

При таком предположении распределения сопротивлений  $n$  элементов системы зависят только от одного единственного сопротивления  $R$ , т. е.  $R_i = \lambda_i R$ . Это означает, что задача содержит только две случайные величины  $R$  и  $S$ . Далее следует, что области отказа для отдельных предельных состояний  $g_j = r_j = s_j = \lambda_j r = \lambda_j s = 0$  вложены друг в друга так, что уравнения  $g_j = 0$  предельных состояний для отказа элементов не разделяются. Все области отказа вложены в область отказа одного элемента — элемента с наибольшей вероятностью отказа.

Таким образом, для области отказа имеем:

$$V = \{x | \bigcup_{j=1}^n [g_j(x) < 0]\} = \max_j \{x | g_j(x) < 0\}.$$

а для вероятности отказа

$$P_f = P \left[ \bigcup_{j=1}^n (Z_j < 0) \right] = \max_j P(Z_j < 0); \quad (3.245)$$

$$P_f = \max_j P_{f_j};$$

При функциональной зависимости между сопротивлениями элементов статически определимой системы вероятность отказа системы равна максимальному значению из вероятностей отказа элементов.

**Оценки общего случая последовательных систем**

**Элементарные оценки.** Поскольку для систем последовательно соединенных элементов вероятность отказа растет с уменьшением корреляции между запасами прочности отдельных предельных состояний (доказательство этого факта можно найти у Дитлевсена [3.86]), то выражения (3.241) или (3.242) и (3.246) можно использовать как верхние и нижние оценки вероятности отказа:

$$\max_j P_{f_j} \leq P_f \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{f_i}) < \sum_{i=1}^n P_{f_i}. \quad (3.247)$$

Эти оценки можно вывести непосредственно из элементарных зависимостей теории вероятностей.

Переходя к индексам безопасности, получим:

$$\min_j \beta_j \geq \beta_{sys} \geq -\Phi^{-1} \left[ 1 - \prod_j \Phi(\beta_j) \right] > -\Phi^{-1} \left[ \sum_{j=1}^n \Phi(-\beta_j) \right]. \quad (3.248)$$

Таким образом, получены просто вычисляемые верхние и нижние оценки вероятности отказа последовательной системы. К сожалению, во многих случаях (в особенности, для систем со многими возможными механизмами отказа и с приблизительно равными вероятностями отказов элементов) эти элементарные оценки оказываются очень широкими. Поэтому возникает потребность более узких оценок при более точном учете корреляции между запасами прочности отдельных предельных состояний.

**Оценки на основе модификации корреляционной матрицы.** Вкратце описываемый ниже подход был разработан Раквицем [3.79, 3.88] на основе теории надежности 1-го порядка. Пользуясь рассмотренными ранее приемами, можно найти сначала для каждого предельного состояния проектную точку с индексом безопасности  $\beta_j$  и коэффициентами чувствительности  $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})^T$  в стандартизованном пространстве  $Y_j$ . Если заменить поверхность предельного состояния  $h_j(y) = 0$  касательной плоскостью в проектной точке  $l_j(y) = \alpha_j^T y + \beta_j = 0$ , то для вероятности отказа по  $j$ -му предельному состоянию получим:

$$P_{f_j} = P[h_j(y) < 0] \approx P[l_j(y) < 0] = P[\alpha_j^T y + \beta_j < 0] = P(Z_j < -\beta_j).$$

Здесь введена новая случайная величина

$$Z_j = \alpha_j^T y, \quad (3.249)$$

которую можно рассматривать как стандартизованный запас прочности предельного состояния  $j$ . Величина  $Z_j$  имеет среднее  $m_{Z_j} = 0$  и стандартное отклонение

$$\sigma_{Z_j} = \sqrt{\sum_i \alpha_{ij}^2} = 1.$$

Величины  $Z_j$  не являются независимыми друг от друга. При коэффициентах корреляции  $\rho_{jk}$  для стандартизован-

ных запасов прочности предельных состояний  $j$  и  $k$  с учетом формул (3.232) и (3.233), а также независимости  $Y_j$  получаем:

$$\rho_{jk} = \alpha_{j1} \alpha_{k1} + \alpha_{j2} \alpha_{k2} + \dots + \alpha_{jm} \alpha_{km} = \alpha_j^T \alpha_k. \quad (3.250)$$

Наконец, для вероятности отказа последовательной системы находим выражение

$$\begin{aligned} P_f &= 1 - P_b = 1 - P \left( \bigcap_j [g_j(X) \geq 0] \right) = \\ &= 1 - P \left\{ \bigcap_j [h_j(Y) \geq 0] \right\} \approx 1 - P \left\{ \bigcap_j \times \right. \\ &\times [l_j(Y) \geq 0] \left. \right\} = 1 - P \left[ \bigcap_j (Z_j^* \geq -\beta_j) \right] = \\ &= 1 - P \left[ \bigcap_j (-Z_j^* \leq \beta_j) \right]. \end{aligned} \quad (3.251)$$

Для вычисления этой вероятности нужно интегрировать  $n$ -мерную стандартизованную плотность нормального распределения

$$P_f = 1 - \frac{|R|^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\beta_1} \dots \int_{-\infty}^{\beta_n} \exp \left( -\frac{1}{2} y^T R^{-1} y \right) \times \times dy_1 dy_2 \dots dy_n, \quad (3.252)$$

где  $R$  — матрица корреляционных коэффициентов  $\rho_{jk}$ .

Простого способа вычисления этого интеграла в общем случае не существует. Однако имеются частные случаи, когда  $n$ -мерный интеграл приводится к одномерному.

Если коэффициенты корреляции  $\rho_{jk}$  можно представить в виде

$$\rho_{jk} = \lambda_j \lambda_k, \quad j \neq k, \quad (3.253)$$

то  $Z_j^*$  выражаются через  $n+1$  независимых стандартизованных случайных величин  $U_0, U_1, \dots, U_n$ , распределенных по нормальному закону [3.89]:

$$Z_j^* = \lambda_j U_0 + \sqrt{1-\lambda_j^2} U_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (3.254)$$

Неравенство

$$Z_j^* \geq -\beta_j$$

в этом случае эквивалентно неравенству

$$U_j \geq (-\beta_j - \lambda_j U_0) / \sqrt{1-\lambda_j^2}. \quad (3.255)$$

Если это выражение подставить в выражение (3.251) и учесть формулу (2.64), то  $n$ -мерный интеграл сведется к простому, который без труда определяется численно:

$$\begin{aligned} P_f &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} P \left( \bigcap_{j=1}^n U_j \geq \frac{-\beta_j - \lambda_j U_0}{\sqrt{1-\lambda_j^2}} \mid U_0 = \right. \\ &= (u) \varphi(u) du; \\ P_f &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \prod_{j=1}^n \Phi \left( \frac{\beta_j + \lambda_j u}{\sqrt{1-\lambda_j^2}} \right) \right] \varphi(u) du. \end{aligned} \quad (3.256)$$

Как ранее упоминалось, вероятность отказа последовательной системы падает с увеличением коэффициентов корреляции  $\rho_{jk}$ . Это обстоятельство является основой для использования формулы (3.256) при вычислении верхних и нижних оценок вероятности отказа. Если выбрать величины  $\lambda$  так, что для всех  $j$  и  $k$

$$\lambda_j \lambda_k \leq \rho_{jk}, \quad j \neq k, \quad (3.257)$$

то выражение (3.256) дает верхнюю оценку  $P_f$ . Если же выбрать  $\lambda$  так, что

$$\lambda_j \lambda_k \geq \rho_{jk}, \quad j \neq k, \quad (3.258)$$

то получаем нижнюю оценку. Естественно, значения  $\lambda$  должны находиться в интервале  $[-1, +1]$ . Оценки будут тем ниже, чем лучше выполняется условие (3.253). Разработано много способов для наилучшего выбора значений  $\lambda$  [3.88].

Простейший выбор, который всегда возможен, для нижней оценки

$$\lambda_j = \sqrt{\max_i \{\rho_{jk}\}}, \quad j \neq k \quad (3.259)$$

и для верхней оценки

$$\lambda_j = \sqrt{\min_i \{\rho_{jk}\}}, \quad j \neq k \quad (3.260)$$

при предположении, что  $\min_i \{\rho_{jk}\}$  является положительной величиной. Эти оценки дают особенно хорошие результаты, если  $\rho_{jk}$  приблизительно одного порядка.

Более узкие оценки можно получить, если удастся выбрать значения  $\lambda$  так, что выражение (3.253) для трех наиболее важных предельных состояний (т. е. состояний с тремя наименьшими локальными индексами безопасности) удовлетворяется точно, а для остальных предельных состояний имеют

место равенства. Если три важнейших предельных состояния имеют порядковые номера 1, 2 и 3, то из  $\lambda_1 \lambda_2 = \rho_{12}$ ;  $\lambda_2 \lambda_3 = \rho_{23}$ ,  $\lambda_1 \lambda_3 = \rho_{13}$  следует:

$$\lambda_1 = \sqrt{\rho_{12} \rho_{13} / \rho_{23}} \quad \lambda_2 = \sqrt{\rho_{21} \rho_{23} / \rho_{13}} \\ \lambda_3 = \sqrt{\rho_{31} \rho_{32} / \rho_{12}} \quad (3.261)$$

Для прочих  $\lambda$  получаем:  
для верхних оценок

$$\lambda_j = \min_{k \leq j+1} \{ \rho_{jk} / \lambda_k \}, \quad j=4, 5, \dots$$

для нижних оценок

$$\lambda_j = \max_{k \leq j+1} \{ \rho_{jk} / \lambda_k \}, \quad j=4, 5, \dots$$

Эти решения имеют место только тогда, когда значения находятся в интервале  $[-1, +1]$ . К сожалению, при сильно различающихся коэффициентах корреляции это условие часто не выполняется.

**Оценки на основе общего правила сложения.** Обозначим события, заключающиеся в отказе по  $j$ -му предельному состоянию  $Z_j < 0$ , через  $F_j$  и разложим в ряд вероятность совокупности отказов по общему закону сложения вероятностей (2.9):

$$P_f = P \left( \bigcup_{j=1}^n F_j \right) = \sum_{j=1}^n P(F_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n P(F_i \cap F_k) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{k=i+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n P(F_i \cap F_k \cap F_l) - \dots - (-1)^n P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n), \quad (3.262)$$

где  $P(F_j \cap F_k) = P[(Z_j < 0) \cap (Z_k < 0)]$  — вероятность одновременного отказа по предельным состояниям  $j$  и  $k$ .

Выражение (3.262) можно использовать для оценки вероятности отказа системы, поскольку отдельные слагаемые в нем знакопеременны и вероятности отказа одновременно по многим предельным состояниям, как правило, существенно ниже, чем вероятность отказа по одному предельному состоянию:  $P(F_j \cap F_k) < P(F_j)$ ,  $F_j \neq F_k$ . Учитывая только первые два члена, можем записать:

$$P_f \leq \min \left\{ \sum_{j=1}^n P(F_j) \right\}; \\ P_f \geq \max \left\{ P(F_1) + \sum_{j=2}^n [P(F_j) - \sum_{k=1}^{j-1} P(F_j \cap F_k)] \right\}. \quad (3.263)$$

Эти оценки часто оказываются весьма широкими. Дитлевсен предложил путь улучшения оценок без существенного увеличения вычислительных затрат. В работе [3.83] он получил выражения:

$$P_f \leq \min \left\{ \sum_{j=1}^n P(F_j) - \sum_{i=2}^n \max_{k < i} P(F_i \cap F_k) \right\}; \\ P_f \geq P(F_1) + \sum_{j=2}^n \max_{k=1}^{j-1} \left\{ P(F_j) - \sum_{k=1}^{j-1} P(F_j \cap F_k) \right\}. \quad (3.264)$$

Определение вероятности пересечения двух событий отказа

$$P(F_j \cap F_k) = P(Z_j < 0 \cap Z_k < 0) = \iint f_X(x) \times \\ \times dx \{ x | g_j(x) < 0 \cap g_k(x) < 0 \} \quad (3.265)$$

существенно облегчается, если применить методы теории надежности 1-го порядка. Тогда для линеаризованных уравнений предельных состояний

$$P(F_j \cap F_k) \approx P[I_j(y) < 0 \cap I_k(y) < 0] = \\ = \Phi_2(-\beta_j, -\beta_k; \rho_{jk}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho_{jk}^2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{-\beta_j} \int_{-\infty}^{-\beta_k} \exp \left( -\frac{y_j^2 - 2\rho_{jk} y_j y_k + y_k^2}{2(1-\rho_{jk}^2)} \right) \times \\ \times dy_j dy_k. \quad (3.266)$$

Способ численного интегрирования этой двумерной функции нормального распределения можно найти в работах [3.89, 3.90, 3.91]. Он заключается в сведении двумерного интеграла к одномерному, для которого численная оценка не вызывает затруднений.

Можно обойти численное интегрирование, используя данные Дитлевсеном [3.83, 3.86] оценки:

$$P_j \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(-\beta_j, -\beta_k, \rho_{jk}) \leq \\ \Phi(-\beta_j) \Phi(-\beta_{k1j}) + \Phi(-\beta_k) \Phi(-\beta_{j1k}); \\ \rho_{jk} > 0 \\ \Phi(-\beta_j) \Phi(-\beta_{k1j}), \rho_{jk} \leq 0 \end{array} \right. ; \quad (3.267)$$

$$P_j \geq \max \left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(-\beta_j, -\beta_k, \rho_{jk}) \geq \\ \Phi(-\beta_j) \Phi(-\beta_{k1j}), \rho_{jk} \geq 0 \\ 0, \rho_{jk} < 0 \end{array} \right. .$$

Вводя эти выражения в формулу (3.264), получим более полную форму оценок Дитлевсена:

$$P_j \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \Phi(-\beta_j) - \sum_{i=2}^n \max_{k < j} \times \\ \times \max \left\{ \begin{array}{l} \Phi(-\beta_i) \Phi(-\beta_{k1i}), \rho_{ik} \geq 0 \\ \Phi(-\beta_k) \Phi(-\beta_{i1k}), \rho_{ik} < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.268)$$

$$P_j \geq \Phi(-\beta_j) + \sum_{j=2}^n \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \Phi(-\beta_j) - \sum_{k=1}^{j-1} [\Phi(-\beta_j) \times \\ \times \Phi(-\beta_{k1j}) + \Phi(-\beta_k) \Phi(-\beta_{j1k})], \rho_{jk} > 0, \\ \Phi(-\beta_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \min \times \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \Phi(-\beta_j) \Phi(-\beta_{k1j}) \\ \Phi(-\beta_k) \Phi(-\beta_{j1k}) \end{array} \right\}, \rho_{jk} \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.269)$$

$$\beta_{j1k} = (\beta_j - \beta_k \rho_{jk}) / \sqrt{1 - \rho_{jk}^2}, \quad (3.269)$$

где  $\beta_{j1k}$  — условный индекс безопасности.

Коэффициент корреляции  $\rho_{jk}$  двух запасов прочности определяется по формуле (3.250). Геометрический смысл введенных здесь величин представлен на рис. 3.34.

При  $\rho < 0,6$  оценки Дитлевсена являются весьма надежными. Возможности улучшения результата при больших  $\rho$  даны Дитлевсеном в работе [3.86].

*Пример 3.21.* Рассмотрим стальную раму (рис. 3.35), нагруженную тремя случайными сосредоточенными силами  $X_2, X_3$  и  $X_4$ . Горизонтальные силы  $X_3$  и  $X_4$  взаимно исключают друг друга, так что всегда действует только одна из них.

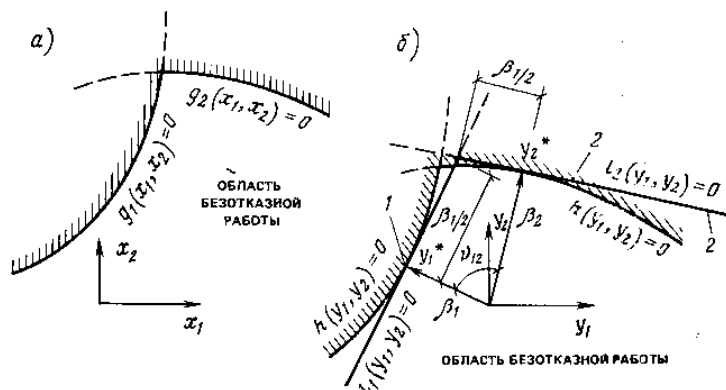


Рис. 3.34. Вероятность отказа систем с последовательным соединением. Решение по теории надежности 1-го порядка на примере  $m=2, n=2$  (векторные величины подчеркнуть)

*a* — предельные состояния системы в исходном пространстве; *b* — предельные состояния системы в нормализованном пространстве; *1* — локальная проектная точка; *2* — линеаризованное предельное состояние

Сталь INP200 имеет коэффициент корреляции предела текучести в различных сечениях рамы, близкий к единице (по данным [3.92] он составляет 0,96), так что пластичность материала будет оцениваться одной случайной величиной  $X_1$ . Распределение базисных переменных  $X_i$  следующее:

$i$	$m_{X_i}$	$\sigma_{X_i}$	$\mu_{0i}$	Тип распределения
1	$26,5 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^4$	$16 \cdot 10^4$	LN
2	50	6	—	N
3	72	8	—	EXI
4	72	8	—	EXI

Разыскиваются верхние и нижние оценки вероятности того, что рама откажет по одному из пяти возможных механизмов образования пластических шарниров (см. рис. 3.35, б).



Получается система уравнений предельных состояний (3.229) для пяти рассматриваемых механизмов образования геометрически изменяемой системы:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= W_{p1} \frac{8}{l} x_1 - x_2 = 0; \\ g_2(x) &= 2 W_{p1} (1/h_1 + 1/h_2) x_1 - x_3 = 0; \\ g_3(x) &= 2 W_{p1} (1/h_1 + 1/h_2) x_1 - x_4 = 0; \\ g_4(x) &= \frac{4 W_{p1}}{l} \left( 2 + \frac{h_1}{h_2} \right) x_1 - x_2 - 2 \frac{h_2}{l} x_3 = 0; \\ g_5(x) &= \frac{4 W_{p1}}{l} \left( 2 + \frac{h_2}{h_1} \right) x_1 - x_2 - 2 \frac{h_2}{l} x_4 = 0. \end{aligned}$$

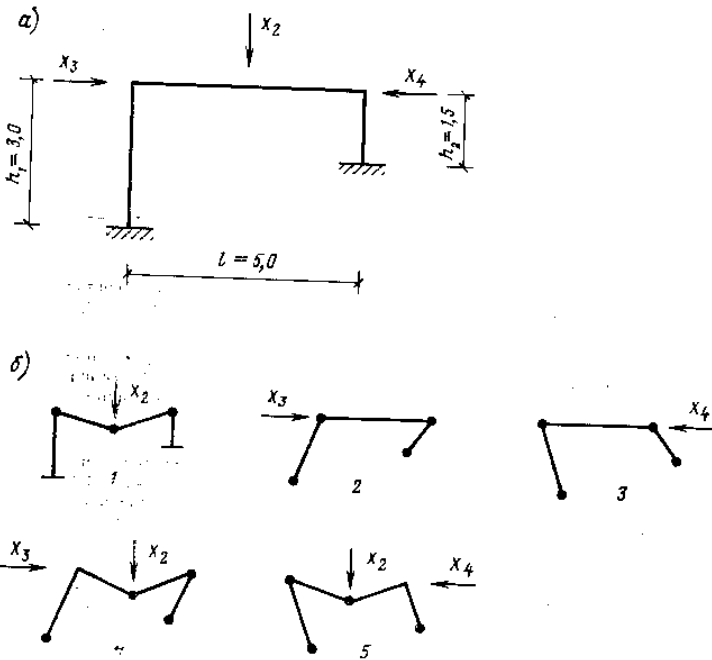


Рис. 3.35. К примеру 3.21

а — исходная система; б — механизмы с пластическими шарнирами.

Вычислим для каждого из пластических механизмов  $f$  локальный индекс безопасности  $\beta_f$  и коэффициенты чувствительности  $\alpha_{ij}$ . В соответствии с изложенным получаем для пяти предельных состояний:

$$\beta = \begin{pmatrix} 6,372 \\ 3,614 \\ 3,614 \\ 3,414 \\ 3,026 \end{pmatrix} \text{ и } P_f = \begin{pmatrix} 9,380 \cdot 10^{-11} \\ 1,508 \cdot 10^{-4} \\ 1,508 \cdot 10^{-4} \\ 3,199 \cdot 10^{-4} \\ 1,240 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Откуда видно, что предельное состояние 5 имеет наименьший индекс безопасности.

Элементарные оценки. По выражениям (3.247) и (3.248) следует:

$$\max \{P_{f_j}\} \leq P_f \leq 1 - \prod_{j=1}^5 (1 - P_{f_j}) < \sum_{j=1}^5 P_{f_j};$$

$$1,240 \cdot 10^{-3} \leq P_f \leq 1,861 \cdot 10^{-3} < 1,862 \cdot 10^{-3} \text{ или } 3,026 \geq \beta_{\text{эгр}} \geq 2,901.$$

Для уточнения оценок методами теории надежности 1-го порядка составим матрицу коэффициентов чувствительности:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,566 & 0,363 & 0,363 & 0,469 & 0,586 \\ -0,824 & 0 & 0 & -0,214 & -0,445 \\ 0 & -0,932 & 0 & -0,857 & 0 \\ 0 & 0 & -0,932 & 0 & -0,677 \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы  $\alpha$  относятся к случайным величинам  $X_i$ , а столбцы к предельным состояниям  $g_i$ . По формуле (3.250) отсюда следует матрица  $R$  коэффициентов корреляции стандартизованных запасов прочности  $Z^*$ :

$$R = \alpha^T \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0,205 & 0,205 & 0,442 & 0,698 \\ 0,205 & 1 & 0,132 & 0,969 & 0,213 \\ 0,205 & 0,132 & 1 & 0,170 & 0,844 \\ 0,442 & 0,969 & 0,170 & 1 & 0,370 \\ 0,698 & 0,213 & 0,844 & 0,370 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оценки Равида. С использованием значений  $\lambda_i$  по выражениям (3.259) и (3.260) получаем:

для нижних оценок

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,835 \\ 0,984 \\ 0,919 \\ 0,984 \\ 0,919 \end{pmatrix}$$

для верхних оценок

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,453 \\ 0,363 \\ 0,363 \\ 0,412 \\ 0,462 \end{pmatrix}$$

Легко убедиться в том, что произведения  $\lambda_i \lambda_k$  для всех  $i$  и  $k$  в первом случае всегда больше или равны, а во втором всегда меньше или равны коэффициентам корреляции  $\rho_{ik}$ .

Поэтому с использованием вышеприведенных значений  $\beta_f$  для отдельных предельных состояний можно найти вероятности отказа путем численного определения одномерных интегралов (3.256) по правилу Симпсона. Получаем:

$$1,372 \cdot 10^{-3} \leq P_f \leq 1,855 \cdot 10^{-3}; \\ 2,995 \geq \beta_{\text{эгр}} \geq 2,902.$$

Оценки Дитлевссена. По индексам безопасности и коэффициентам корреляции отдельных предельных состояний получаем из выражения (3.267) условные индексы безопасности  $\beta_{ijk}$  (см. таблицу)

i	Значения $\beta_{ijk}$ при k				
	1	2	3	4	5
1	—	5,753	5,753	5,421	5,949
2	2,358	—	3,165	1,238	3,039
3	2,358	3,165	—	3,078	1,976
4	0,666	-0,356	2,841	—	2,470
5	-1,985	2,309	-0,045	1,897	—

Значения функций распределения  $\Phi(-\beta_i)$  и  $\Phi(-\beta_{ijk})$  также сводим в таблицу.

i	Значения $\Phi(-\beta_i)$ и $\Phi(-\beta_{ijk})$ при k				
	1	2	3	4	5
1	—	$8,614 \cdot 10^{-13}$	$8,614 \cdot 10^{-13}$	$2,368 \cdot 10^{-11}$	$9,151 \cdot 10^{-11}$
2	$6,618 \cdot 10^{-13}$	—	$1,171 \cdot 10^{-7}$	$9,637 \cdot 10^{-5}$	$1,578 \cdot 10^{-6}$
3	$6,618 \cdot 10^{-13}$	$1,171 \cdot 10^{-7}$	—	$3,391 \cdot 10^{-7}$	$7,811 \cdot 10^{-5}$
4	$9,491 \cdot 10^{-12}$	$3,454 \cdot 10^{-5}$	$3,331 \cdot 10^{-7}$	—	$9,246 \cdot 10^{-6}$
5	$1,680 \cdot 10^{-12}$	$1,470 \cdot 10^{-6}$	$2,980 \cdot 10^{-5}$	$8,379 \cdot 10^{-6}$	—

Используя эти таблицы из выражения (3.268) получаем:  $1,602 \cdot 10^{-3} \leq P_f \leq 1,687 \cdot 10^{-3}$  и  $2,948 \gg \beta_{sys} \gg 2,932$ .

Если определить численным интегрированием двумерных нормальных распределений вероятность  $P(F_j \cap F_k)$  в формуле (3.268), то получаем более узкие оценки:  $1,621 \cdot 10^{-3} \leq P_f \leq 1,635 \cdot 10^{-3}$  и  $2,944 \gg \beta_{sys} \gg 2,941$ .

### 3.3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

При прямом использовании методов теории надежности и при косвенном ее применении при учете требований норм возникает вопрос определения параметров проектируемого сооружения таким образом, чтобы для рассматриваемого предельного состояния либо системы предельных состояний вероятность отказа равнялась заданному допускаемому значению или чтобы индекс безопасности равнялся требуемой заданной заранее величине.

Искомый проектный параметр, большей частью относящийся к поперечному сечению (площадь, момент сопротивления, момент инерции, высота и т. д.), обозначим через  $A$ . Он всегда входит в уравнение предельного состояния, которое теперь целесообразно записать в виде  $g(x, A) = 0$ .

Возникает задача определить  $A$  таким образом, чтобы поверхность предельного состояния отсекала область отказа в плотности распределения  $f(x)$ , объем которой равен в точности  $\text{zul } P_f$ , т. е. имело бы место равенство

$$\int_{\{x | g(x, A) < 0\}} f_X(x) dx = \text{zul } P_f. \quad (3.270)$$

В этой общей форме равенство (3.270) разрешимо только для немногих частных случаев. Рассмотрим два таких случая:  $g(x, A) = Ax_1 - x_2 = 0$ , причем  $X_1$  и  $X_2$  имеют нормальное распределение, тогда

$$A = \frac{1}{m_{X_1}^2 - \sigma_{X_1}^2 \text{erf } \beta^2} \times \times \left[ m_{X_1} m_{X_2} + \sqrt{m_{X_1}^2 m_{X_2}^2 - (m_{X_1}^2 - \sigma_{X_1}^2 \text{erf } \beta^2)(m_{X_2}^2 - \sigma_{X_2}^2 \text{erf } \beta^2)} \right],$$

где

$$\text{erf } \beta = -\Phi^{-1}(\text{zul } P_f); \quad (3.271)$$

$g(x, A) = Ax_1 - x_2 = 0$  причем  $X_1$  и  $X_2$  подчиняются логнормальному закону распределения ( $x_0 = 0$ ), тогда

$$A = \exp(m_{U_2} - m_{U_1} + \text{erf } \beta \sqrt{\sigma_{U_2}^2 + \sigma_{U_1}^2}),$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{U_1} &= \sqrt{\ln(1+U_1^2)}; \\ m_{U_1} &= \ln m_{X_1} - \sigma_{U_1}^2 / 2; \\ \sigma_i &= \sigma_{X_i} / m_{X_i}, \quad i=1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (3.272)$$

При проектировании с использованием методов теории надежности I-го порядка задача состоит в определении  $A$  таким образом, чтобы в стандартизованном пространстве гиперповерхность предельного состояния  $h(y, A) = 0$  касалась гиперболы с радиусом  $\text{erf } \beta$  и центром в начале координат. Эта задача существенно проще, поскольку итерационные методы, рассмотренные выше, путем незначительной модификации можно приспособить для целей проектирования. Для этого надо назначить  $\text{erf } \beta$  и итерационным процессом найти  $A$ .

Приведем соответствующий алгоритм:

- 1) выбирается начальный вектор  $y^{(0)}$  в стандартизованном пространстве;
- 2) вычисляется соответствующий вектор в исходном пространстве:

$$x_i^{(0)} = F^{-1}[\Phi(y_i^{(0)})], \quad i=1, 2, \dots, m;$$

- 3) определяется проектный параметр  $A^{(0)}$ , удовлетворяющий уравнению предельного состояния  $g = (x^{(0)}, A^{(0)}) = 0$ ;  
 4) вычисляется вектор градиентов:

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x=x^{(0)}} \frac{\varphi(y_i^{(0)})}{f_{X_i}(x_i^{(0)})}, \quad i=1, \dots, m;$$

- 5) вычисляются направляющие косинусы:

$$\alpha_i = \frac{\partial h / \partial y_i}{\left[ \sum_i \left( \frac{\partial h}{\partial y_i} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad i=1, \dots, m;$$

- 6) вычисляются улучшенные значения:

$$y_i^{(1)} = -\alpha_i \operatorname{erf} \beta, \quad i=1, \dots, m;$$

- 7) повторяются шаги 2—6 до достижения сходимости.

По сравнению с методами прямого интегрирования и Монте-Карло, методы теории надежности 1-го порядка имеют существенное преимущество, что проектирование оказывается не сложнее, чем оценка надежности.

Если для системы с последовательным соединением элементов для  $n$  предельных состояний должны быть выдержаны вероятность отказа системы или индекс безопасности для системы  $\beta_{sys}$ , то при проектировании для отдельных предельных состояний следует задать больший требуемый индекс безопасности  $\operatorname{erf} \beta_j$ .

Разница между обоими индексами безопасности  $\Delta\beta = \operatorname{erf} \beta_i - \beta_{sys}$  зависит от числа  $n$  предельных состояний системы и от коэффициентов корреляции  $\rho_{jk}$  между запасами прочности различных предельных состояний. Последние, естественно, неизвестны до выбора проектных параметров.

Если исходить из разумного предположения, что проектирование для различных состояний проводится с одинаковым индексом безопасности  $\operatorname{erf} \beta$  и если также можно оценить порядок величин «средних» коэффициентов корреляции  $\rho$ , то можно вычислить разность  $\Delta\beta$  используя выражение (3.256):

$$\Delta\beta = \operatorname{erf} \beta + \Phi^{-1} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \left[ \Phi \left( \frac{\operatorname{erf} \beta + u \sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right]^n \right\} \times \right. \\ \left. \times \varphi(u) du \right). \quad (3.273)$$

Для некоторых характерных значений  $n$ ,  $\rho$  и  $\operatorname{erf} \beta$  эти разности приведены в табл. 3.3, чтобы облегчить задание отправных точек при предварительном проектировании. При требовании повышенной точности неизбежны повторные вычисления.

Таблица 3.3. Значения  $\Delta\beta = \operatorname{erf} \beta - \beta_{sys}$  для  $n$  предельных состояний

$\rho$	$n$	$\operatorname{erf} \beta$				
		2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0
	2	0,304	0,217	0,167	0,136	0,115
	5	0,766	0,528	0,399	0,320	0,268
	10	1,178	0,786	0,583	0,464	0,387
	50	2,477	1,488	1,049	0,817	0,672
	100	3,281	1,856	1,269	0,977	0,799
	500	—	2,978	1,848	1,373	1,107
	1000	—	3,646	2,136	1,556	1,245
	5000	—	—	2,949	2,018	1,581
	10 000	—	—	3,392	2,237	1,733
0,5	1	0	0	0	0	0
	2	0,265	0,207	0,165	0,135	0,114
	5	0,622	0,491	0,391	0,319	0,267
	10	0,888	0,709	0,567	0,462	0,386
	50	1,469	1,208	0,984	0,805	0,670
	100	1,699	1,415	1,164	0,956	0,795
	500	2,190	1,869	1,572	1,311	1,095
	1000	2,386	2,054	1,742	1,463	1,227
	5000	2,809	2,459	2,122	1,811	1,564
	10 000	2,979	2,623	2,279	1,957	1,667
0,75	1	0	0	0	0	0
	2	0,213	0,180	0,153	0,130	0,111
	5	0,475	0,409	0,352	0,302	0,260
	10	0,655	0,572	0,497	0,431	0,373
	50	1,023	0,914	0,811	0,717	0,631
	100	1,163	1,047	0,937	0,834	0,738
	500	1,455	1,329	1,206	1,090	0,978
	1000	1,570	1,439	1,314	1,193	1,078
	5000	1,816	1,682	1,549	1,421	1,297
	10 000	1,915	1,779	1,644	1,514	1,387
0,9	1	0	0	0	0	0
	2	0,149	0,135	0,123	0,111	0,100
	5	0,321	0,295	0,271	0,247	0,226
	10	0,435	0,403	0,372	0,343	0,304
	50	0,658	0,616	0,578	0,540	0,504
	100	0,739	0,698	0,656	0,617	0,578
	500	0,912	0,867	0,822	0,778	0,736
	1000	0,979	0,933	0,887	0,841	0,798
	5000	1,123	1,074	1,027	0,981	0,934
	10 000	1,180	1,131	1,083	1,035	0,990
1,0	Все	0	0	0	0	0

Пример 3.22. Требуется спроектировать балку (см. пример 3.1, рис. 3.4). Нужно определить пластический момент сопротивления  $W_{pl} = A$ , причем в предельном состоянии образования пластического шарнира в заделке следует выдержать условие для индекса безопасности  $\text{erf } \beta = 4$  (или  $\text{zul } P_f = 3,169 \cdot 10^{-3}$ ).

Выберем начальную точку, лежащую на окружности радиуса  $\text{erf } \beta$ :

$$y_1 = -\text{erf } \beta / \sqrt{m} = -4 / \sqrt{2}; \quad y_2 = 4 / \sqrt{2}.$$

Такой выбор начальной точки не является обязательной предпосылкой сходимости, однако сокращает итерационный процесс, как правило, на один шаг.

Решение идет по вышеприведенному алгоритму (см. таблицу); исходные данные взяты из примера 3.1.

k	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$A^{(k)}$	$\alpha_1^{(k)}$	$\alpha_2^{(k)}$
0	-2,828	2,828	$21,26 \cdot 10^4$	26,55	$2,498 \cdot 10^{-4}$	0,3013	-0,9535
1	-1,205	3,814	$23,70 \cdot 10^4$	32,05	$2,706 \cdot 10^{-4}$	0,3611	-0,9325
2	-1,445	2,730	$23,28 \cdot 10^4$	31,35	$2,709 \cdot 10^{-4}$	0,3502	-0,9367
3	-1,401	3,747	$23,35 \cdot 10^4$	31,63	$2,709 \cdot 10^{-4}$	0,3522	-0,9359
4	-1,409	3,744	$23,34 \cdot 10^4$	31,63	$2,709 \cdot 10^{-4}$	0,3519	-0,9360

Итак, требуемый пластический момент сопротивления составляет  $2,709 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ .

#### 3.4. НАЗНАЧЕНИЕ ТРЕБУЕМОГО УРОВНЯ БЕЗОПАСНОСТИ

Определение безопасности сооружения методами теории надежности предполагает, что имеются требования по заданной допустимой вероятности отказа  $\text{zul } P_f$  или индекса безопасности  $\text{erf } \beta$ .

Задача назначения уровня безопасности является по своей сути социальной задачей оптимизации. Неблагоприятны как слишком высокая, так и слишком ограниченная безопасность, в первом случае из-за больших материальных затрат, а во втором — из-за частых случаев повреждений и отказов и малой долговечности сооружений. Поэтому необходимо стремиться не к наибольшей, а к оптимальной безопасности, к уровню, приемлемому для общества.

В этой области отсутствует достаточный опыт и не сформулированы какие-либо обязательные условия. Ниже рассматриваются некоторые возможные пути назначения  $\text{zul } P_f$  или  $\text{erf } \beta$ , которые могут быть полезны при решении этой проблемы.

#### 1. РАСЧЕТ ПО СУЩЕСТВУЮЩИМ НОРМАМ

В п. 1.4 было установлено, что в существующих нормативных документах на основе многолетнего опыта путем эмпирического процесса оптимизации достигнут известный приемлемый уровень безопасности. Этот уровень можно установить на основе теории надежности и принять его как исходный для дальнейшего рассмотрения.

Имея выражение  $P_f = P [g(x, A) < 0]$ , в общей форме можно получить определяющие уравнения для оценки оперативной вероятности отказа, гарантированной нормами:

$$P_f = P [g [x, g^{-1}(x^{(n)}, \gamma)] < 0]. \quad (3.274)$$

По расчетам для различных проектных случаев по нормам получаются, как правило, очень большие различия между найденными вероятностями отказов. Для оценок выбираются максимальные значения  $P_f$  или минимальные значения  $\text{erf } \beta$ .

Такой путь позволяет совершить переход от традиционных моделей безопасности к современным моделям, основанным на методах теории надежности. С другой стороны, здесь таится опасность перенести возможные запасы прочности, имеющиеся в существующих нормах, на более точные решения теории надежности.

#### 2. СРАВНЕНИЕ ЧАСТОТ ОТКАЗОВ С ЧАСТОТАМИ НЕСЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ И СМЕРТЕЙ

Имеется большое количество статистических материалов по частотам несчастных случаев (в том числе со смертельными исходами), которым подвержен современный человек в обычных обстоятельствах. Эти данные можно привлечь для сравнительного анализа. Грубую ориентировку дает относительная частота наступления смерти за счет суммы всех причин. По данным работы [3.93] для жителей бывшей ГДР эта частота составляет  $10^{-3}$  в 1 год для мужчин в возрасте от 17 до 18 лет, для женщин от 35 до 36 лет и  $10^{-2}$  в 1 год для мужчин от 54 до 55 лет, для женщин от 60 до 61 года.

Вероятность смерти, большая, чем  $10^{-3}$  в 1 год, считается неприемлемой, поэтому вероятность выхода сооружения из строя с потерей несущей способности  $P_f = 10^{-3}/\text{год}$  можно принять за абсолютную верхнюю границу. В табл. 3.4 приведены частоты несчастных случаев со смертельным исходом для США, из которой видно, что вероятность от  $10^{-7}$  до  $10^{-6}$  в год соответствует крайне редким событиям. Эту вероятность можно рассматривать как нижнюю оценку вероятности отказа сооружения.

Таблица 3.4. Выборка из статистики несчастных случаев со смертельным исходом за 1967 год по данным О'Нейла [3.94]

Вид несчастного случая	Относительная частота, отнесенная к общей численности населения, за 1 год
Дорожные происшествия	$2,7 \cdot 10^{-4}$
Падения	$1,0 \cdot 10^{-4}$
Пожары и взрывы	$3,7 \cdot 10^{-5}$
Несчастные случаи на воде	$2,9 \cdot 10^{-6}$
Авиакатастрофы	$9,0 \cdot 10^{-6}$
Отравления газом	$7,9 \cdot 10^{-6}$
Железнодорожные катастрофы	$5,0 \cdot 10^{-6}$
Обморожение	$1,6 \cdot 10^{-6}$
Голод, жажда	$9,7 \cdot 10^{-7}$
Природные катастрофы (землетрясения, наводнения и др.)	$8,2 \cdot 10^{-7}$
Поражение молнией	$4,4 \cdot 10^{-7}$
Нападение зверей	$2,2 \cdot 10^{-7}$
Перепады атмосферного давления	$6,5 \cdot 10^{-8}$

### 3. РАССМОТРЕНИЕ РИСКА

При оценке случаев отказа важна не только частота их появления, но и тяжесть последствий для общества. Чтобы ввести эту оценку в рассмотрение, определяется понятие риска  $r_f$  как произведение вероятности отказа и ожидаемых последствий отказа  $V_f$  [1.5, 3.95]:

$$r_f = P_f V_f. \quad (3.275)$$

Один и тот же риск может быть причинен или высокой вероятностью отказа с ограниченными последствиями, или ограниченной вероятностью отказа с высоким уровнем ущерба. Таким образом, математическое определение риска (3.275) находится в соответствии с разговорным понятием риска.

Вероятность отказа и последствия отказа для определенных видов отказа являются, как правило, обратно пропорциональными величинами. На рис. 3.36 для некоторых природных катастроф показана зависимость между частотой появления их во всем мире в течение года и числом жертв [3.96]. Постоянный риск в этой двойной логарифмической шкале можно было бы представить прямой линией, наклоненной под углом  $45^\circ$ .

Последствия отказа заметно различаются по своему характеру. В общем случае их можно разделить на три группы: последствия для жизни и здоровья людей;

экономические последствия, которые далее могут быть подразделены на непосредственные последствия отказа из-за повреждения сооружения и на косвенные последствия отказа

из-за выхода его из эксплуатации, например за счет остановки производства;

последствия для окружающей среды и культурных ценностей.

Наступление отказа редко ведет только к одной единственной группе последствий. Если необходимо ввести различные группы последствий в единое исследование риска, то требуется привлечение подходящих весовых функций  $C(V_f)$ , кото-

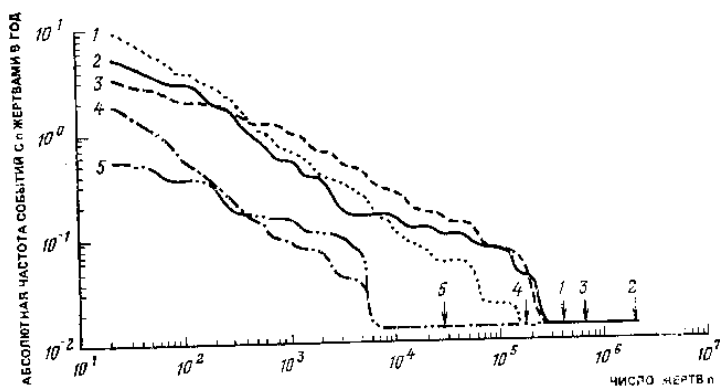


Рис. 3.36. Частота встречающихся природных катастроф в зависимости от числа жертв (стрелки обозначают конец кривых)

1 — ураганы; 2 — наводнения; 3 — землетрясения; 4 — лавины и оползни; 5 — извержения вулканов

рые сводят различные последствия к единому базису сравнения (например, к деньгам). Конечно, назначение функции  $C(V_f)$  не может быть свободно от субъективных оценок. «Общественный суммарный риск» можно определить как интеграл по всем последствиям отказа:

$$R_f = \int C(V_f) P_f(V_f) dV_f. \quad (3.276)$$

Исследования риска ведутся прежде всего для того, чтобы сравнить риск от новых технологий с риском от существующих технологий или риском от природных катастроф.

### 4. ЭКОНОМИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОТКАЗА

Как правило, самому дешевому техническому решению сопутствует наибольший риск, и, наоборот, варианты с ограниченным риском стоят дороже. Это взаимовлияние риска и

сметной стоимости определяет порядок принятия решения в инженерном деле.

Если последствия отказа ограничиваются только экономическими потерями или последствия можно свести к стоимостной функции, то ситуация может быть представлена в классической форме экстремальной задачи:

$$\min \{C_b (P_f) + C (V_f) P_f\}. \quad (3.277)$$

Оптимальный уровень безопасности достигается в том случае, если сумма сметной стоимости строительства  $C_b (P_f)$  и стоимость последствий отказа  $C (V_f) P_f$  минимальна. В стоимости строительства рассматривается, естественно, только та часть, которая определяется в процессе проектирования и является функцией вероятности отказа. Второй член в выражении (3.277) можно умножить на коэффициент, зависящий от налога и срока службы и приводящий будущие затраты к сегодняшнему уровню.

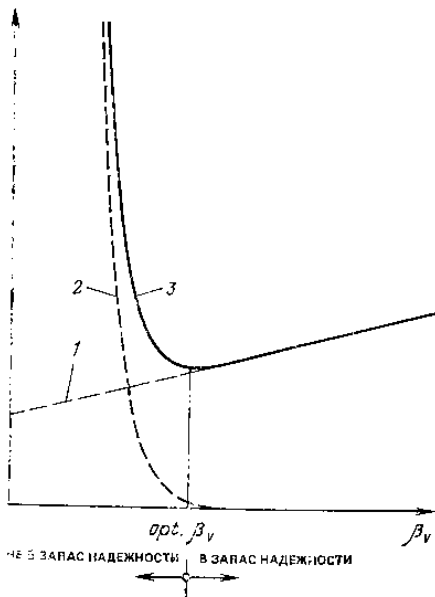


Рис. 3.37. Оптимальный уровень надежности по выражению (3.286)

1 — строительные затраты; 2 — затраты на устранение последствий отказа; 3 — общие затраты

Другая стратегия оптимизации [1.13] исходит из того, что максимизируется прибыль, определяемая самим существованием объекта:

$$\max (B - C_b (P_f) - [B + C (V_f)] P_f). \quad (3.278)$$

где  $B$  — ожидаемая прибыль при условии, что конструкция не выйдет из строя.

Решением формулы (3.277) или (3.278) определяются экономически оптимальная вероятность отказа и оптимальный индекс безопасности либо соответствующие им оптимальные проектные размеры для рассматриваемого предельного состояния или системы предельных состояний.

На рис. 3.37 для задачи (3.277) показан характерный вид зависимости суммарных затрат от индекса безопасности. Типичным для этого графика является отсутствие симметрии. Отклонение от оптимального уровня безопасности в сторону области отказа ведет к существенно более неблагоприятным последствиям за счет учащающихся случаев отказа, чем отклонение в сторону области безопасности работы. Это в широком смысле слова не так опасно. Большей частью левая ветвь имеет наклон, на порядок больший, чем правая, что следует учитывать при назначении  $\sigma \beta$  или  $\mu \beta$ . Они никогда не должны отклоняться от оптимальных значений в сторону области отказов.

#### 5. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ К НАЗНАЧЕНИЮ ТРЕБУЕМОГО УРОВНЯ БЕЗОПАСНОСТИ

На сегодня имеется немного предложений по назначению уровня безопасности, которые можно охарактеризовать как предварительные попытки. Они различаются дифференцированием оперативной вероятности отказа или уровня безопасности в зависимости от тяжести возможных последствий отказа, а также подходами к чисто экономическим последствиям и последствиям для жизни и здоровья людей. Кроме того, в этих предложениях дифференцируются виды предельного состояния — предельное состояние по несущей способности или по эксплуатации, а также по характеру разрушения — вязкое либо хрупкое.

В табл. 3.5—3.8 приводятся предложения, которые могут рассматриваться как исходные для принятия решения. С другой стороны, эти предложения свидетельствуют о многообразии еще остающихся открытыми проблем. Все предложения отнесены к периоду времени  $T=1$  год.

Дифференциальный подход к уровню безопасности в традиционной модели глобального коэффициента запаса или допускаемых напряжений содержался в неявном виде, так что в этой области у нас слишком мало опыта. Здесь негативное влияние оказывала господствующая в прошлом концепция «абсолютной безопасности». А абсолютную безопасность, естественно, нельзя дифференцировать.

Таблица 3.5. Величины  $z \ln P_f$  по предложению СІВ (1976 г. [4.5])

Число лиц, подвергающихся опасности	$z \ln P_f$ при экономических последствиях		
	ограниченных	средних	больших
Малые	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Среднее	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Большое ( $>10$ )	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$

Примечание.  $z \ln P_f < \frac{\text{Срок службы в годах} \times 10^6}{\text{Число лиц, подвергающихся опасности}}$

Таблица 3.6. Величины  $\text{erf } \beta$  по предложению комитета Безопасности сооружений (1981 г. [4.4])

Предельное состояние	$\text{erf } \beta$ при классе безопасности		
	1	2	3
По возможности эксплуатации	2,5	3,0	3,5
По несущей способности	4,2	4,7	5,2

Таблица 3.7. Классы безопасности

Позволенные последствия, преимущественно касающиеся несущей способности	возможности эксплуатации		Класс безопасности
	ограниченные	существенные	
Отсутствие опасности для жизни людей и ограниченные экономические последствия	Ограниченные экономические последствия и ограниченное влияние на возможность эксплуатации		1
Опасность для жизни людей и (или) существенные экономические последствия	Существенные экономические последствия, существенное ограничение эксплуатации		2
Большое значение сооружения для общества	Большое экономические последствия, большое ограничение на возможность эксплуатации		3

Если при потере возможности дальнейшей эксплуатации возникает опасность для жизни людей (например, неплотности в резервуарах или трубопроводах с ядовитыми веществами), то это рассматривается как потеря несущей способности.

Таблица 3.8. Величины  $\text{erf } \beta$  по предложениям Эллингууда (1982 г. [4.18])

Последствия отказа	$\text{erf } \beta$ при разрушении	
	вязком	хрупком
Не тяжелые	2,5—3,0	3,0—3,5
Тяжелые	3,0—3,5	$\geq 4,0$

## 4. ПРАКТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БЕЗОПАСНОСТИ

### 4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Чтобы удостовериться в надежности проектируемого объекта на практике, как правило, не используют расчеты на основе теорий надежности. Они слишком сложны и в ближайшем будущем их применение будет ограничено особыми случаями — только для сооружений, имеющих большое экономическое значение и значительные последствия при их отказе. С другой стороны, традиционные детерминистические модели безопасности развиты сегодня так, что на их основе можно приблизиться к оценке, даваемой методами теории надежности.

В этих моделях базисные переменные представляются не случайными величинами или стохастическими процессами  $X_i$ , а постоянными величинами, вводимыми в уравнение предельного состояния в качестве так называемых нормативных или номинальных значений  $x_i^{(n)}$ .

Чтобы гарантировать достаточно малую вероятность отказа, следует создать достаточно большой запас прочности между сопротивлением  $R$  и нагрузкой  $S$ . Для этого вводятся коэффициент запаса  $\gamma$  или частные коэффициенты надежности  $\gamma_i$ . Нормативные значения  $x_i^{(n)}$  и коэффициенты запаса  $\gamma_i$  называют совокупно элементами безопасности. Кроме того, необходимо знать правила применения нормативных значений и частных коэффициентов надежности в разрешающих уравнениях. Эти правила образуют так называемый формат норм. Под форматом норм понимают прежде всего число используемых частных коэффициентов надежности или других элементов безопасности, их место в расчетных уравнениях и правила сочетаний нагрузок.

### 4.2. НОРМАТИВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

С помощью нормативных значений решаются две важные задачи. С одной стороны, эти значения, являясь основой расчета, вместе с общим коэффициентом запаса или частными коэффициентами надежности образуют систему величин, по-

звляющих удостоверить безопасность с использованием уравнения предельного состояния по нормам. С другой стороны, они являются базой для различных приемов контроля изготовления материалов, производства строительных работ и последующей эксплуатации сооружения.

Для материала нормативные значения идентичны, как правило, тем значениям, которые производитель работ или изготовитель материала могут гарантировать с определенной вероятностью. Эти значения определяют, таким образом, ответственность упомянутых лиц в общей задаче обеспечения безопасности сооружения и являются определяющими при составлении предписаний по проверке и приемке.

При нагрузках, определяемых человеческой деятельностью, нормативные значения являются допускаемыми нагрузками, за превышение которых несет ответственность пользователь. При нагрузках, определяемых природными факторами, нормативные значения находят статистическими методами. В этом случае они представляют собой или величины квантилей  $x_q$  с заданной вероятностью неперевышения  $q$ , или средние величины (при  $q=0,5$ ). Если нормативные значения определяются как величины квантилей (рис. 4.1), то для сопротивления принимаются нижние значения с ограниченной вероятностью неперевышения, а для нагрузок — верхние значения с высокой

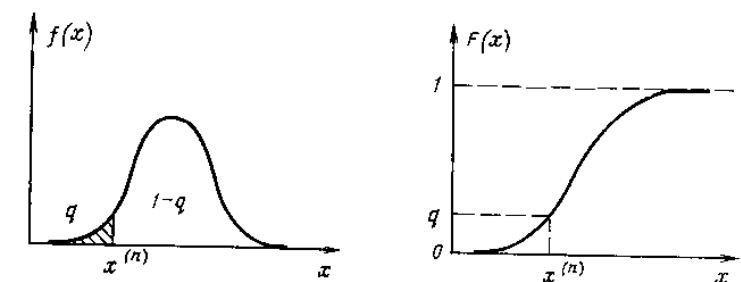


Рис. 4.1. Нормативное значение как величина квантиля

вероятностью неперевышения. В частных случаях можно также определять для базисных переменных два нормативных значения: одно верхнее, другое нижнее [4.3, 4.4].

При изменяющихся во времени нагрузках величины квантилей относят к распределениям экстремальных значений для определенных периодов времени. Эти квантили по выражению (2.91) могут задаваться как средние периоды повторяемости нормативных значений.

Если  $F(x)$  функция распределения базисной переменной, а  $q$  вероятность, с которой нормативное значение  $x^{(n)}$  не может

быть превышено, то это значение может быть найдено из формулы

$$x^{(n)} = F^{-1}(q). \quad (4.1)$$

Обратная функция  $F^{-1}$  может быть найдена в прил. II для различных типов функции распределения. Если, например, имеет место нормальное распределение, то

$$x^{(n)} = m + \sigma \Phi^{-1}(q). \quad (4.2)$$

Для некоторых вероятностей  $q$  значения  $\Phi^{-1}$  составляют:

$q \dots$	0,001	0,01	0,02	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
$\Phi^{-1}(q) \dots$	-3,091	-2,327	-2,054	-1,645	-1,282	0	1,282	1,645	2,054	2,327	3,091

Возникает вопрос, какой уровень вероятности  $q$  положить в основу выбора нормативного значения? В отношении обеспечения постоянного уровня вероятности отказа для спроектированного по нормам сооружения желательно выбирать для нагрузки возможно более высокий, а для сопротивления возможно более низкий уровень вероятности  $q$ . Этому противостоит функция нормативного значения в отношении контроля. Для статистических методов контроля качества желательно, чтобы не назначались экстремальные значения вероятностей, иначе необходимы как большие объемы выборочных испытаний, так и большие затраты на проведение контроля.

Из-за этих противоречивых требований до сих пор нет какого-либо единого мнения. Наряду с научными соображениями в этом вопросе существенную роль играют традиции. Приведем некоторые качественные установки и рекомендации.

В стандарте [4.8] нормативное значение для прочности устанавливается как 0,05-квантиль. Для всех прочих свойств материалов (плотность, модуль упругости, коэффициент трения и т. д.) выбираются средние значения. Это касается и характеристик строительных грунтов.

Комитет «Безопасность строительства» [4.4] рекомендует для постоянных воздействий с малыми коэффициентами вариации ( $v \leq 0,1$ ) принимать среднее значение, а для постоянных воздействий с большими коэффициентами вариации ( $v > 0,1$ ) рекомендуется принимать 0,95-квантиль при неблагоприятном действии и 0,05-квантиль при действии, повышающем сопротивление сооружения. Для временных воздействий рекомендуется: при  $v \leq 0,1$  — средние значения экстремальных распределений; при  $v > 0,1$  — 0,99-квантиль экстремальных распределений рассматриваемого периода времени.

Для геометрических размеров назначаются средние значения. Имеющиеся сегодня рекомендации не полны и не сво-



бодны от противоречий, так что не удивительно, что на международном уровне не достигнуто единство в назначении нормативных значений. Как пример, упомянем о том, что в нормах бывшей ГДР TGL 32274 для снеговых нагрузок принято в качестве нормативного значение 0,8-квантиля, т. е. период повторяемости составляет 5 лет. В то же время в нормах ФРГ DIN 1055 исходят из 0,95-квантиля с периодом повторяемости 20 лет. Нормативные снеговые нагрузки различались в обеих частях Германии существенно.

Применительно к нагрузкам особенно часто отсутствует достаточно число статистических данных, чтобы оценить величину квантиля, принимаемого за нормативное значение.

### 4.3. ОБЩИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПАСА И ДОПУСКАЕМОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Мерой безопасности в традиционных эмпирических подходах служит общий коэффициент запаса  $\gamma$ . Он определяется как отношение сопротивления к нагрузке, вычисленное по нормативным значениям базисных переменных  $x_i^{(n)}$ . Уравнение предельного состояния (3.17) в этом случае имеет вид:

$$\bar{g}(x^{(n)}, \gamma) = r^{(n)} - \gamma s^{(n)} = 0, \quad (4.3)$$

или

$$\gamma = r^{(n)} / s^{(n)}, \quad (4.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r^{(n)} &= \bar{g}_R(x_{R_1}^{(n)}, x_{R_2}^{(n)}, \dots); \\ s^{(n)} &= \bar{g}_S(x_{S_1}^{(n)}, x_{S_2}^{(n)}, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Нормы часто оперируют с упрощенными механическими моделями, поэтому здесь и в дальнейшем будем различать механическую модель  $g$ , используемую в исследованиях теории надежности, и упрощенную механическую модель  $\bar{g}$  в нормах.

Параметры  $r^{(n)}$  и  $s^{(n)}$  должны быть сравнимыми величинами одной размерности, например размерности напряжений или нагрузок в зависимости от характера рассматриваемой проблемы механики.

Для создания достаточного запаса прочности  $Z = R - S$ , гарантирующего достаточно малую вероятность отказа, назначается коэффициент запаса  $\text{erf } \gamma > 1$ . Проверка считается выполненной, если конструкция запроектирована так, что  $\gamma = r^{(n)} / s^{(n)} \geq \text{erf } \gamma$ . Общий коэффициент запаса является эмпирическим масштабом безопасности сооружения.

Для инженера-практика, рассматривающего конкретную проблему с определенными нормативными значениями и прочими заданными условиями, коэффициент запаса представляет собой хорошее средство обеспечения требуемой надежности на основе его собственного и собранного в нормах коллективного опыта. Для практиков этот коэффициент и сегодня является единственной величиной, по которой судят о безопасности сооружения.

Общий коэффициент запаса теоретически не может служить мерой безопасности, ведь вероятность отказа зависит, кроме того, от назначения нормативных значений, распределений базисных переменных и самой механической модели. Определенная оперативная вероятность отказа в зависимости от прочих условий может быть выражена при практически любом значении  $\gamma$ .

Если  $r^{(n)}$  линейная функция только одного параметра материала  $x_{R_1}^{(n)}$  и выполняется оценка безопасности в отношении напряжений

$$r^{(n)} = \bar{g}_R(x_{R_1}^{(n)}) = Ax_{R_1}^{(n)}, \quad (4.6)$$

то в нормах этот частный случай обычно соответствует «методу допускаемых напряжений». Вводя это выражение в уравнение предельного состояния (4.3)  $\bar{g}(x^{(n)}, \gamma) = r^{(n)} - \gamma s^{(n)} = Ax_{R_1}^{(n)} - \gamma s^{(n)}$  и обозначая допускаемое напряжение как  $\text{zul } \sigma = x_{R_1}^{(n)} / \text{erf } \gamma$ , получаем разрешающее уравнение метода допускаемых напряжений в форме

$$s^{(n)} / A = \sigma \leq \text{zul } \sigma. \quad (4.7)$$

Предполагаемая линейность функции  $g$  или  $\bar{g}$  подразумевает применимость в данном случае теории упругости. Давление нормативного значения сопротивления на общий коэффициент запаса устанавливается относительно низкий уровень напряжений, когда обеспечиваются условия работы в упругой области. Но это также означает, что сравнение между нагрузкой и несущей способностью проводится в области, которая лежит далеко от предельного состояния, и что методом допускаемых напряжений невозможно получить физически обоснованные соотношения для предельных состояний.

Проверка безопасности по допускаемым напряжениям являлась господствующей в прошлом и достаточно широко распространена сегодня. Допускаемые напряжения настолько доминировали в практических нормах, что делались попытки представить в форме метода допускаемых напряжений и такие проблемы, которые по своему существу вовсе не являются проблемами напряжений. Вспомним о проверке сжатого

стального стержня на устойчивость, которая в прошлом с помощью коэффициентов  $\varphi$  сводилась к проверке напряжений. Однако свести к форме метода все проверки допускаемых напряжений никогда не удавалось.

С теоретической точки зрения общий коэффициент запаса и допускаемые напряжения представляют собой простое практическое средство, чтобы гарантировать достаточно малую вероятность отказа. Они правильно выбраны, если спроектированное с их помощью сооружение обладает необходимыми безопасностью и надежностью.

Для норм с более широкой областью применения использование одного коэффициента запаса при оценке предельного состояния малоприспособно. Например, здесь один и тот же коэффициент запаса имеет место как для постоянной, так и для временной нагрузки. Поскольку разброс последней существенно выше, вероятность отказа сооружения, спроектированного по методу допускаемых напряжений, возрастает с увеличением доли временной нагрузки в общей нагрузке на сооружение. Кроме того, недопустимо высокой получается вероятность отказа сооружения под действием двух противоположно направленных нагрузок с интенсивностями одного порядка, когда суммарное напряженное состояние определяется разницей этих нагрузок. Поэтому в прошлом не раз предпринимались попытки повысить универсальность метода допускаемых напряжений и применения общего коэффициента запаса.

Одна из возможностей состоит в разделении области применимости норм на ряд частных областей, где вводятся свои допускаемые напряжения и коэффициенты запаса. Так, в некоторых нормах можно найти обширные таблицы допускаемых напряжений, разделенные по материалу, вариантам нагружений, характеру и виду напряжений, виду сооружения и т. д.

Другой возможностью добиться большей гибкости норм является расщепление общего коэффициента запаса на сумму или произведение составляющих. Предложения по представлению его как произведения давались Бальзером [4.19] и Херцогом [4.20]. При этом общий коэффициент запаса представляется или в форме

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_r, \quad (4.8)$$

или в форме

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_f \frac{1}{\gamma_{f+1}} \dots \frac{1}{\gamma_r}. \quad (4.9)$$

Все частные коэффициенты в произведении (4.8) больше единицы или равны ей. В выражении (4.9) коэффициенты, стоящие в числителе, соответствуют нагрузке, а в знаменателе — характеристикам материала.

Предложение по расщеплению общего коэффициента запаса на сумму коэффициентов давалось Бакером [4.21].

Все эти предложения на практике не оправдали себя и сегодня рассматриваются как устаревшие.

#### 4.4. ЧАСТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ НАДЕЖНОСТИ

##### 1. ЧАСТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В МЕТОДЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Разрешающие уравнения  $\bar{g} = 0$  в методе предельных нагрузок относятся к предельному состоянию по несущей способности конструкции при учете нелинейных свойств материалов и резервов системы за счет перераспределения внутренних усилий. В качестве элементов безопасности фигурируют частные коэффициенты надежности, которые вводятся к отдельным составляющим общей нагрузки.

В уравнении предельного состояния  $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$  базисные переменные  $X_i$  в большинстве случаев можно разделить на те, что относятся к нагрузке ( $X_{R_i}$ ), и на те, что относятся к сопротивлению ( $X_{S_j}$ ). Представим это в форме

$$g(\dots, x_{R_i}, \dots, x_{S_j}, \dots) = 0. \quad (4.10)$$

В методе предельных нагрузок  $x_{S_j}$  замещаются на  $\gamma_j x_{S_j}^{(n)}$ , а  $x_{R_i}$  — на  $x_{R_i}^{(n)}$ , т. е. базисные переменные замещаются нормативными значениями, причем к нагрузкам вводятся коэффициенты  $\gamma_j$ . Выражение (4.10) в этом случае принимает вид:

$$\bar{g}(\dots, x_{R_i}^{(n)}, \dots, \gamma_j x_{S_j}^{(n)}, \dots) = 0. \quad (4.11)$$

В простых случаях на две группы можно разделить не только базисные переменные, но и само уравнение предельного состояния:  $g(x) = g_R(x_{R_1}, x_{R_2}, \dots) - g_S(x_{S_1}, x_{S_2}, \dots) = 0$ .

Тогда разрешающее уравнение в нормах принимает вид:

$$\bar{g}_R(x_{R_1}^{(n)}, x_{R_2}^{(n)}, \dots) - \bar{g}_S(\gamma_1 x_{S_1}^{(n)}, \gamma_2 x_{S_2}^{(n)}, \dots) = 0. \quad (4.12)$$

Если для предельной нагрузки важным является учет свойств материалов, то разброс свойств этих материалов также может быть учтен частными коэффициентами надежности.

## 2. ЧАСТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В МЕТОДЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

### Основные положения

Международная тенденция составления нормативных документов направлена на применение метода предельных состояний. Это рекомендуется многими международными организациями [4,2, 4.6, 4.8]. В некоторых странах этот метод обязателен. Следует отметить, что в развитии и применении этого метода приоритет принадлежит российским специалистам.

В методе предельных состояний при решении уравнения предельного состояния вводятся частные коэффициенты надежности, которые учитывают изменчивость базисных переменных. Они могут быть множителями, делителями или добавляться к нормативным элементам переменных. За счет этих операций из нормативных значений образуются так называемые расчетные или проектные значения, с помощью которых и проверяется надежность по уравнению предельного состояния. Расчетные значения базисных переменных  $X_i$ ,  $X_{R_i}$  и  $X_{S_j}$  обозначаются  $x_i^{(r)}$ ,  $x_{R_i}^{(r)}$  и  $x_{S_j}^{(r)}$ .

Различают пять типов частных коэффициентов надежности:

- 1) коэффициент надежности по назначению  $\gamma_n$  учитывает экономическое и социальное значения, размеры последствий отказов и сроки службы различных сооружений;
- 2) коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_f$  учитывает изменчивость нагрузок и возможные отклонения от нормальных условий эксплуатации;
- 3) коэффициент сочетаний нагрузок  $\psi$  учитывает малую вероятность одновременного появления наибольших значений различных нагрузок; рассматривается только вместе с правилом сочетаний нагрузок;
- 4) коэффициент надежности по материалу  $\gamma_m$  учитывает неизбежные изменчивость и разброс свойств строительных материалов и грунтов;
- 5) коэффициент условий работы  $\gamma_d$  учитывает неточности расчетной модели, возникающие за счет ее упрощения и идеализации.

Простое правило назначения частных коэффициентов надежности в виде множителей или делителей к нормативным значениям базисных переменных состояло бы в том, что большие величины коэффициентов должны обеспечивать большую надежность конструкции. Это означает, что по отношению к нагрузкам коэффициенты вводятся в виде множителей, а к материалу — в виде делителей. Такое правило имеет тенденцию к широкому распространению.

Однако в некоторых нормативах 1987 г. коэффициент условий работы для материала в уравнении предельного состояния также выступает как множитель. Это означает, что он понимается не как частный коэффициент надежности, а скорее как величина, которая модифицирует характеристики прочности.

Применение элементов безопасности в форме слагаемых  $x^{(r)} = x^{(n)} + \Delta x$  в ряде задач обладает определенным преимуществом. Мультипликативные коэффициенты теоретически являются более подходящими, когда коэффициенты вариации базисных переменных в области применимости норм остаются постоянными. Применение аддитивных коэффициентов целесообразно, когда постоянно стандартное отклонение. Частные коэффициенты надежности в виде множителей, естественно, невозможно применять в задачах, где нормативные величины равны нулю. Подобная ситуация наблюдается в расчетах конструкций по деформированной схеме в отношении случайных эксцентриситетов. Элементы безопасности в форме дополнительных слагаемых используются для учета отклонений геометрических размеров, если они оказывают заметное влияние на безопасность сооружения.

В уравнении предельного состояния  $g(x) = g(\dots, x_R, \dots, x_{R_i}, \dots) = 0$  каждая базисная переменная  $X_i$  заменяется выражением, состоящим из нормативного значения и частного коэффициента надежности, а именно:

для сопротивления

$$X_{R_i} \rightarrow \gamma_{d,R_i} x_{R_i}^{(n)} / \gamma_{m,i}$$

для нагрузок

$$X_{S_j} \rightarrow \gamma_n \gamma_{d,S_j} \psi_j \gamma_{f,i} x_{S_j}^{(n)}$$

Получаем общее определяющее уравнение:

$$\bar{g} [\dots, (\gamma_{d,R_i} x_{R_i}^{(n)} / \gamma_{m,i}), \dots, (\gamma_n \gamma_{d,S_j} \psi_j \gamma_{f,i} x_{S_j}^{(n)}), \dots] = 0, \quad (4.13)$$

причем расчетные значения сопротивлений

$$x_{R_i}^{(r)} = \gamma_{d,R_i} x_{R_i}^{(n)} / \gamma_{m,i} \quad (4.14)$$

расчетные значения нагрузок

$$x_{S_j}^{(r)} = \gamma_n \gamma_{d,S_j} \psi_j \gamma_{f,i} x_{S_j}^{(n)}, \quad (4.15)$$

а величины  $\gamma_{d,R_i}$  и  $\gamma_{d,S_j}$  могут быть произведениями многих коэффициентов условий работы.

Уравнения  $\bar{g}(\dots, x_{R_i}^{(r)}, \dots, x_{S_j}^{(r)}, \dots) = 0$  (4.16) представ-

ляют собой схематическое описание расположения элементов безопасности в уравнении предельного состояния для объяснения принципов подхода к решению задач. Для конкретных задач необходимы и возможны существенно более точные представления.

Очень важный частный случай состоит в том, что в уравнении предельного состояния можно разделить результирующее воздействие и результирующее сопротивление:

$$g(x) = g_R(x_{R_1}, x_{R_2}, \dots) - g_S(x_{S_1}, x_{S_2}, \dots) = 0.$$

Аналогичное выражение в нормах имеет вид:

$$\bar{g}(x^{(r)}, \psi) = \bar{g}_R(x_{R_i}^{(r)}, x_{R_i}^{(r)}, \dots) - \bar{g}_S \times \times (\psi_1 x_{S_1}^{(r)}, \psi_2 x_{S_2}^{(r)}, \dots) = 0. \quad (4.17)$$

В часто встречающихся случаях линейной зависимости между базисными переменными  $g(x) = \sum_i d_i x_{R_i} - \sum_j c_j x_{S_j} = 0$  уравнение предельного состояния в методе предельных состояний с частными коэффициентами надежности принимает форму

$$\bar{g}(x^{(r)}) = \sum_i d_i \gamma_{d, R_i} \frac{x_{R_i}^{(r)}}{\gamma_{m, i}} - \gamma_n \sum_j c_j \times \times \gamma_{d, S_j} \psi_j \gamma_{f, i} x_{S_j}^{(r)} = 0.$$

или

$$\bar{g}(x^{(r)}) = \sum_i d_i x_{R_i}^{(r)} - \sum_j c_j \psi_j x_{S_j}^{(r)} = 0. \quad (4.18)$$

где  $c_j$  и  $d_i$  могут быть определены для рассматриваемой задачи методами механики и сопротивления материалов и являются составными частями механической модели  $g$ , имеющей здесь линейную структуру. В этом случае коэффициент надежности по ответственности  $\gamma_n$  может быть вынесен за скобки, поскольку он не зависит от варианта нагружения.

Можно привести и другие частные случаи структуры уравнения предельного состояния с частными коэффициентами надежности, как, например, при проверке эксплуатационной способности или для задачи усталости. Но главный принцип — замена базисных переменных  $X_i$  вышеприведенными функциями элементов безопасности — всегда один и тот же.

## Коэффициент надежности по назначению

С помощью коэффициента надежности по назначению дифференцируются уровни безопасности в зависимости от социального и экономического значения сооружения, от размера последствий и величины ущерба при возможном отказе. При проектировании сооружения, имеющего большое значение для общества и тяжелые последствия отказа, следует стремиться к более низкой вероятности отказа, в то время как для обычного сооружения за счет несколько повышенной вероятности отказа можно получить некоторую экономию материала.

Другой задачей, которая решается введением этого коэффициента, является выравнивание различий в вероятностях отказа при разных сроках службы сооружений.

Подобный подход невозможен при традиционных детерминистических представлениях о безопасности, которые исходят из понятия «абсолютной безопасности», т. е. в итоге из требования равенства нулю вероятности отказа для всех сооружений, когда дифференцировать вероятность отказа также невозможно. Традиционная концепция абсолютной безопасности в прошлом не позволяла разделять требования по безопасности. Поэтому не удивительно, что нам не удается извлечь опыт в этой области из прошлого времени, и сама постановка вопроса сегодня относительно нова. Только основные на теории вероятностей исследования надежности открывают возможности изучения этой проблемы.

Коэффициент надежности по назначению имеет форму общего коэффициента запаса, на который умножаются все нагрузки.

Сегодня нет единого мнения, должен ли этот коэффициент вводиться только при рассмотрении предельного состояния по несущей способности или он должен учитываться и в предельном состоянии по возможности эксплуатации. В стандарте TGL 33402 [4.23] принято, что во втором случае коэффициент надежности по назначению не учитывается. Другого мнения придерживается комитет по строительству ФРГ, который в работе [4.4] предусматривает и для второй группы предельных состояний подразделение требований безопасности для различных классов сооружений по надежности.

Теоретически целесообразно всю систему частных коэффициентов надежности построить так, чтобы коэффициент по назначению для преобладающего числа сооружений, т. е. сооружений среднего класса, был равен 1. Для сооружений, имеющих большое значение,  $\gamma_n > 1$ , а для прочих  $\gamma_n < 1$ .

Интересное предложение по назначению  $\gamma_n$ , кратко излагаемое ниже, разработано в ЦНИИСК [4.14]. Предусматри-

вается представить коэффициент надежности по назначению в виде произведения двух коэффициентов

$$\gamma_n = \gamma_{n1} \cdot \gamma_{n2}$$

где  $\gamma_{n1}$  — коэффициент, учитывающий возможный ущерб для жизни и здоровья людей;  $\gamma_{n2}$  — коэффициент, учитывающий возможный материальный ущерб.

Оба коэффициента в зависимости от обстоятельств могут принимать три значения:  $\gamma_{n1} = 0,9; 1,0; 1,1$  и  $\gamma_{n2} = 0,9; 0,95; 1,0$ . Естественно, что ущерб для людей оценивается выше, чем материальный ущерб.

Области действия первого коэффициента:

$\gamma_{n1} = 1,1$  — сооружение, где постоянно или периодически может находиться большое число людей и отказ которого представляет угрозу для многих людей (театры, кинотеатры, танцевальные залы, клубы, вокзалы, детские сады, АЭС, мосты и т. д.);

$\gamma_{n1} = 1,0$  — сооружение, где постоянно или периодически может находиться среднее число людей и отказ которого представляет угрозу для среднего числа людей (жилые дома, общественные и промышленные здания, не входящие в первую группу);

$\gamma_{n1} = 0,9$  — сооружение, где люди бывают редко и отказ которого ведет к малой вероятности угрозы для людей (теплицы, силосы, склады, мачты ЛЭП, антенны, градирни, заборы и т. д.).

Области действия второго коэффициента:

$\gamma_{n2} = 1,0$  — сооружение, имеющее первостепенное значение для всего народного хозяйства (главные цехи фабрик и заводов, главные здания электростанций, дома, мачты ЛЭП 35 кВ, элеваторы, музеи и т. д.);

$\gamma_{n2} = 0,95$  — сооружение, имеющее первостепенное значение для отдельных отраслей народного хозяйства (вспомогательные промышленные здания, склады, дымовые трубы, вокзалы, мосты и т. д.);

$\gamma_{n2} = 0,9$  — сооружение, не играющее решающей роли в народном хозяйстве (теплицы, телефонные линии, заборы, склады сырья, пешеходные мосты, временные сооружения и т. д.).

Предлагается дифференцировать  $\gamma_{n2}$  для жилых зданий по числу этажей и конструктивной схеме. По выражению (4.19) с округлением до 0,05 получаем значения коэффициентов надежности по назначению, приведенные в табл. 4.1 [4.14].

Таблица 4.1. Коэффициенты  $\gamma_n$

$\gamma_{n1}$	$\gamma_n$ при $\gamma_{n2}$		
	0,9	0,95	1,0
0,9	0,8	0,85	0,9
1,0	0,9	0,95	1,0
1,1	1,0	1,05	1,1

Во всем мире сегодня проявляется тенденция к введению трех классов безопасности, для которых или непосредственно задаются коэффициенты надежности по назначению, или устанавливаются допускаемые вероятности отказа либо требуемые индексы безопасности.

#### Коэффициент надежности по нагрузке

Естественная изменчивость нагрузок, возможная неточность стохастической модели и отклонения от нормальных условий эксплуатации учитываются коэффициентом надежности по нагрузке, который не зависит от материала сооружения.

Коэффициент надежности по нагрузке зависит от рассматриваемого предельного состояния. В частности, для первой группы предельных состояний он больше, чем для второй группы.

Для постоянных нагрузок, т. е. прежде всего от собственного веса, предварительного напряжения и давления грунта, принимается  $\gamma_f > 1$ , если данное воздействие ведет к повышению нагрузки, и  $\gamma_f < 1$ , если данное воздействие уменьшает нагрузку.

Это значит, что в большинстве случаев для собственного веса и давления грунта  $\gamma_f > 1$ , а для предварительного напряжения  $\gamma_f < 1$ . Обратный случай имеет место, если уменьшение постоянной нагрузки ведет к неблагоприятным последствиям. Это бывает при проверке сооружения на устойчивость ползучими (опрокидывание, скольжение) и в тех случаях, когда значительные силы действуют снизу вверх.

Если внутренние усилия от собственного веса в различных элементах конструкции определяются по линиям влияния с ординатами разных знаков, то принимается, что изменчивость собственного веса во всех элементах идентична, и назначается единый коэффициент надежности по нагрузке. Так, например, для неразрезной балки принимается единый коэффициент для всех пролетов, а именно  $\gamma_f > 1$ , если для рассматриваемого внутреннего усилия собственный вес оказывает неблагоприятное влияние, и  $\gamma_f < 1$ , если его действие оказывается разгружающим.

Аналогично поступают, если напряжение в исследуемом сечении вызывается различными внутренними усилиями (например, изгибающим моментом и продольной силой). И в этом случае для доли напряжения от собственного веса используется один и тот же коэффициент  $\gamma_f$ .

Если в каком-либо поперечном сечении необходимо выполнить много проверок для разных предельных состояний, то в зависимости от обстоятельств принимают самые неблагоприятные коэффициенты  $\gamma_f$ .

При временных нагрузках принимается только  $\gamma_f > 1$ , поскольку разгружающее влияние временных нагрузок не учитывается в расчете. Для нормативных значений кратковременных воздействий принимается  $\gamma_f = 1$ .

В бывшей ГДР коэффициенты надежности по нагрузке лежат в следующих пределах [4.23, 4.24]:

собственный вес	0,8—0,9; 1,1—1,3
предварительное напряжение	0,82—0,935; 1,065—1,18
подвижные нагрузки в жилых и общественных зданиях	1,2—1,4
подвижные нагрузки в промышленных и сельскохозяйственных зданиях	1,2—1,4
нагрузки от жидкостей в трубопроводах	1,0—1,1
ветер	1,2—1,3
снег	1,4

#### Правило сочетаний нагрузок и коэффициент сочетаний

С помощью правила сочетаний нагрузок и содержащегося в нем коэффициента сочетаний учитывается ограниченная вероятность одновременного появления наибольших значений кратковременных нагрузок.

Правило сочетаний представляет собой нормативное предписание, следуя которому по расчетным значениям многих кратковременных нагрузок можно найти расчетное значение комбинации. Оно сводит работу с «комбинацией нагрузок» к работе с «отдельной нагрузкой». Поэтому правило сочетаний должно позволять в предельном случае, когда все кратковременные нагрузки, кроме одной, стремятся к нулю, получить расчетное значение именно этой нагрузки, как результирующую величину комбинации. Кроме того, оно должно удовлетворять условию, чтобы спроектированная с его помощью конструкция имела примерно равную надежность для всех возможных сочетаний нагрузок. С другой стороны, правило

сочетаний не должно быть слишком сложным с тем, чтобы не усложнять расчеты.

Входящие в правило сочетаний параметры и есть так называемые коэффициенты сочетаний нагрузок. Они всегда меньше или равны 1. Правило сочетаний не зависит от материала сооружения.

Предположение о снижении нагрузки при многих составляющих не ново и приближенно учитывалось еще в методе допускаемых напряжений. Там сочетания нагрузок подразделялись на главные, дополнительные и особые нагрузки, которым соответствовали разные уровни допускаемых напряжений. Такой подход по сути своей нелогичен, поскольку эффект, который однозначно относится к нагрузке, за счет этого разделения относился и к материалу. Кроме того, этот подход мало пригоден, поскольку введение разных уровней допускаемых напряжений влияет на совокупность всех нагрузок, включая и постоянно действующие. Сегодня в общем случае различают основные и особые сочетания. Основное сочетание складывается из постоянных и временных (кратковременных и длительных) нагрузок за исключением внезапных. Если среди нагрузок есть внезапные, то говорят об особом сочетании [4.1, 4.3, 4.23].

Во всех нормах в особом сочетании внезапные нагрузки вводятся полной величиной, а кратковременные с понижающим коэффициентом (например, в TGL 32274  $\psi = 0,8$ ).

**Единый коэффициент сочетаний, зависящий от числа кратковременных нагрузок.** Наиболее простая возможность заключается в том, чтобы установить единый коэффициент для всех участвующих в сочетании нагрузок. Этот коэффициент зависит от числа  $m$  нагрузок, образующих комбинацию, и обозначается  $\psi_m$ .

Поскольку конструкция должна быть проверена также и на каждую нагрузку правило сочетаний получается в виде:

$$g_s = \max \begin{cases} \bar{g}_s(x_{S_1}^{(r)}) \\ \bar{g}_s(x_{S_2}^{(r)}) \\ \vdots \\ \bar{g}_s(x_{S_m}^{(r)}) \\ \bar{g}_s(\psi_m x_{S_1}^{(r)}, \psi_m x_{S_2}^{(r)}, \dots, \psi_m x_{S_m}^{(r)}) \end{cases} \quad (4.20)$$

Для частного случая упругой работы конструкции с линейной зависимостью  $g$  между нагрузками и напряжениями это правило можно записать следующим образом:

$$\bar{g}_S = \max \begin{cases} c_1 x_{S_1}^{(r)} \\ c_2 x_{S_2}^{(r)} \\ \vdots \\ c_m x_{S_m}^{(r)} \\ \psi_m \sum_{i=1}^m c_i x_{S_i}^{(r)} \end{cases} \quad (4.21)$$

Для упрощения записи в выражениях (4.20) и (4.21) опущены постоянные нагрузки, которые, естественно, не уменьшаются в сочетании нагрузок.

Это правило в литературе называется LRF (Load Reduction Factor) и широко применяется в нормах. Оно используется в стандарте бывшей ГДР [4.23], а также в канадских нормах и нормах Американского института бетона. В бывшей ГДР единый коэффициент сочетаний, зависящий от числа  $m$  кратковременных нагрузок, принимается следующим:

$$\psi_m = \begin{cases} 1,0 & \text{при } m=1 \\ 0,9 & \text{при } m=2, 3 \\ 0,8 & \text{при } m \geq 4. \end{cases} \quad (4.22)$$

Приведем в качестве примера применения правила сочетаний (4.20) сочетание снеговой и ветровой нагрузок по TGL 32274:

$$\bar{g}_S = \max \begin{cases} \bar{g}_S & (\text{ветер}) \\ \bar{g}_S & (0,9 \text{ ветер}, 0,9 \text{ снег}) \\ \bar{g}_S & (\text{снег}) \end{cases}$$

При двух входящих в сочетание нагрузках правило сочетаний можно представить графически на плоскости. Если в пространственной системе координат по двум осям откладывать обе нагрузки  $c_1 x_1^{(r)}$  и  $c_2 x_2^{(r)}$ , а по третьей оси комбинацию обеих нагрузок по какому-либо правилу сочетаний, то для заданного уровня  $\bar{g}_S = \text{const}$  можно представить линию равных воздействий. Рис. 4.2 дает представление о типичных кривых для различных правил сочетаний.

В работе [3.56] эти кривые при  $\bar{g}_S = 1$  называются кривыми сочетаний для решений задач на основе теории надежности. Эти кривые в работе [3.56] детально исследованы и для многомерных случаев.

На рис. 4.2, а и б представлены оба возможных граничных случая: а) нет уменьшения обеих нагрузок за счет коэффициента сочетаний; б) полное исчезновение одной из нагрузок в сочетании. Между этими предельными случаями лежат все возможные правила сочетаний. Решения на основе теории надежности, найденные при условии, что вероятность превышения для всех комбинаций постоянна, представляют собой непрерывную кривую (рис. 4.2, в), а упрощенные правила сочетаний по нормам — ломаные линии.

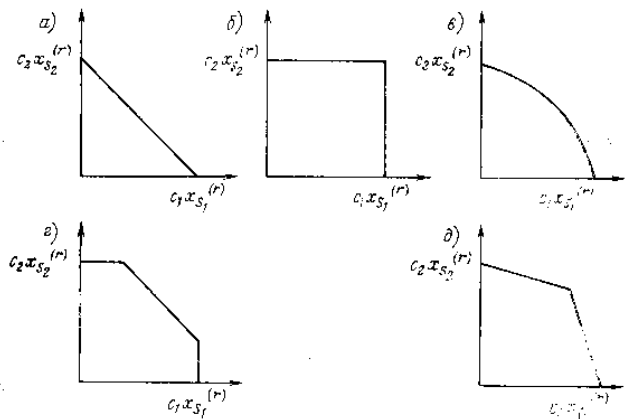


Рис. 4.2. Линии равных нормативных нагрузок  $g = \text{const}$ , определенных по различным правилам сочетаний

а — без коэффициентов сочетаний (предельный случай с запасом); б — полное исключение меньшей нагрузки (предельный случай с выходом в область отказа); в — решение по теории надежности (общий вид непрерывной кривой); г — правило сочетаний по формуле (4.21); д — то же, по формуле (4.24)

Правило (4.21) представлено на рис. 4.2, г. Изменение коэффициента сочетаний  $\psi_m$  ведет здесь к параллельному переносу наклонной прямой. Если вспомнить, что теория надежности дает иванную кривую, то рис. 4.2, в и г показывают недостатки этого правила, которое в областях, близких к осям (слева вверху и справа внизу), дает постоянные значения коэффициента сочетаний, что идет не в запас прочности. Пользуясь этим правилом, следует быть очень осмотрительным и нельзя назначать слишком малые  $\psi$ . В нормах, основанных на этом правиле, нет  $\psi$ , меньших 0,8.

Многие коэффициенты сочетаний, зависящие от нагруженности. Более подходящее теоретически обоснованное правило

получается, если перенести в нормы основные положения рассмотренного ранее правила Туркстры. В этом случае экстремальное значение одной нагрузки комбинируется со значениями всех остальных для произвольного момента времени. При  $m$  изменяющихся во времени нагрузках возникают  $m$  сочетаний такого рода. Определяющим является наибольшее значение из всех комбинаций.

Если экстремальную величину одной нагрузки представить в нормах расчетным значением, а величины других нагрузок в виде расчетных значений, умноженных на коэффициент сочетаний, то для  $m$  переменных нагрузок можно дать следующее правило сочетаний:

$$\bar{g}_s = \max \begin{cases} \bar{g}_s(x_{S_1}^{(r)}, \psi_2 x_{S_2}^{(r)}, \dots, \psi_m x_{S_m}^{(r)}) \\ \bar{g}_s(\psi_1 x_{S_1}^{(r)}, x_{S_2}^{(r)}, \dots, \psi_m x_{S_m}^{(r)}) \\ \vdots \\ \bar{g}_s(\psi_1 x_{S_1}^{(r)}, \psi_2 x_{S_2}^{(r)}, \dots, x_{S_m}^{(r)}) \end{cases} \quad (4.23)$$

Для линейного случая

$$\bar{g}_s = \max \begin{cases} c_1 x_{S_1}^{(r)} + c_2 \psi_2 x_{S_2}^{(r)} + \dots + c_m \psi_m x_{S_m}^{(r)} \\ c_1 \psi_1 x_{S_1}^{(r)} + c_2 x_{S_2}^{(r)} + \dots + c_m \psi_m x_{S_m}^{(r)} \\ \vdots \\ c_1 \psi_1 x_{S_1}^{(r)} + c_2 \psi_2 x_{S_2}^{(r)} + \dots + c_m x_{S_m}^{(r)} \end{cases} \quad (4.24)$$

или

$$\bar{g}_s = \max_{i=1, \dots, m} \left\{ c_i x_{S_i}^{(r)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m c_j \psi_j x_{S_j}^{(r)} \right\}.$$

В этом подходе имеется столько коэффициентов сочетаний, сколько есть случаев нагружений, и коэффициенты сочетаний можно представить в форме вектора. Существенно, что в этом правиле коэффициент  $\psi_i$  зависит только от нагрузки  $x_i$ . Графически это правило представлено на рис. 4.2, б.

Преимущество этого способа заключается в том, что он может быть обоснован приближенными представлениями теории случайных процессов, и в связи с этим следует ожидать хорошего отражения действительности. Недостатком является большой объем вычислений, поскольку приходится исследовать многие сочетания нагрузок для каждого предельного состояния и выбирать наихудшие. Кроме того, приходится рассматривать и учитывать, одну за другой переменные на-

грузки в качестве «базисной нагрузки», уменьшая все другие нагрузки с помощью коэффициентов сочетаний. Часто одна из нагрузок доминирует, так что при проверке очевидно, какая из нагрузок в качестве базисной должна вводиться в сочетание без коэффициента. Это правило называется также САФ-правилом (Companion Action Factor). Оно часто стало использоваться в новых нормах, например, в рекомендациях [4.4, 4.5].

В качестве примера применения правила (4.23) рассмотрим сочетание ветровой и снеговой нагрузок по DIN 1055

$$\bar{g}_s = \max \begin{cases} \bar{g}_s \quad (\text{снег, } 0,5 \text{ ветер}) \\ \bar{g}_s \quad (\text{ветер, } 0,5 \text{ снег}) \end{cases}$$

и комбинацию ветровой и крановой нагрузок по предписанию [4.11]

$$\bar{g}_s = \max \begin{cases} \bar{g}_s \quad (\text{ветер, } 1/3 \text{ крановая нагрузка}) \\ \bar{g}_s \quad (\text{крановая нагрузка, } 1/3 \text{ ветер}) \end{cases}$$

Многие коэффициенты сочетаний нагрузок, зависящие от варианта нагрузки и сочетания нагрузок. Если коэффициенты сочетаний зависят не только от нагрузки, к которой они относятся, но и от базисной нагрузки, а в связи с этим и от вида сочетания, то возможно дальнейшее уточнение правила сочетаний:

$$\bar{g}_s = \max \begin{cases} \bar{g}_s(\psi_{11} x_{S_1}^{(r)}, \psi_{12} x_{S_2}^{(r)}, \dots, \psi_{1m} x_{S_m}^{(r)}) \\ \bar{g}_s(\psi_{21} x_{S_1}^{(r)}, \psi_{22} x_{S_2}^{(r)}, \dots, \psi_{2m} x_{S_m}^{(r)}) \end{cases}$$

В линейном случае

$$\bar{g}_s = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^m c_j \psi_{ji} x_{S_j}^{(r)} \right\} \quad (4.25)$$

Совокупность коэффициентов сочетаний нагрузок можно представить в виде матрицы. В настоящее время еще нет единого мнения о том, принимать ли эту матрицу квадратной и симметричной ( $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ ) или целесообразней допустить неквадратные матрицы [3.56, 4.26]. В симметричном случае коэффициенты сочетаний на главной диагонали матрицы  $\psi_{ii} = 1$  и могут быть интерпретированы как коэффициенты сочетаний некоторой нагрузки самой с собой.

Объем вычислений, необходимый при использовании этого правила, существенно возрастает по сравнению с двумя при-



веденными выше более простыми правилами. С другой стороны, это правило дает решение, более близкое к решению на основе теории надежности. Как пример применения этого приема с несимметричной матрицей приведем правило сочетаний, рекомендуемое Эллингвудом и др. [4.27], на основе теоретических исследований проблемы надежности. Правда, в этом правиле фигурирует произведение коэффициента надежности по нагрузке и коэффициента сочетания, которое относится к нормативным значениям нагрузки:

$$\bar{g}_S = \max \begin{cases} \bar{g}_S (1,4 x_g^{(n)}) \\ \bar{g}_S (1,2 x_g^{(n)}, 1,6 x_p^{(n)}) \\ \bar{g}_S (1,2 x_g^{(n)}, 0,5 x_p^{(n)}, 1,6 x_s^{(n)}) \\ \bar{g}_S (1,2 x_g^{(n)}, 1,6 x_s^{(n)}, 0,8 x_w^{(n)}) \\ \bar{g}_S (1,2 x_g^{(n)}, 0,5 x_p^{(n)}, 1,3 x_w^{(n)}) \\ \bar{g}_S (1,2 x_g^{(n)}, 0,5 x_p^{(n)}, 1,5 x_c^{(n)}) \\ \bar{g}_S (1,2 x_g^{(n)}, 0,2 x_s^{(n)}, 1,5 x_c^{(n)}) \end{cases}$$

где  $x_g^{(n)}$  — нормативные значения нагрузок по стандарту США А-58; ( $x_g^{(n)}$  — собственный вес;  $x_p^{(n)}$  — транспортная нагрузка;  $x_s^{(n)}$  — снег;  $x_w^{(n)}$  — ветер;  $x_c^{(n)}$  — сейсмическое воздействие).

### Коэффициент надежности по материалу

Снижение безопасности, вызванное разбросом свойств материалов и грунтов, учитывается коэффициентом надежности по материалу. Это снижение возникает за счет возможности неблагоприятных отклонений от нормативных значений из-за случайного характера свойств материалов. Коэффициентом надежности по материалу учитываются и неточности связи между характеристиками материала в сооружении и лабораторными образцами. Часто этим коэффициентом учитывается также влияние отклонений геометрических размеров поперечных сечений на надежность, что теоретически, конечно, неправильно, и эти отклонения следует учитывать коэффициентом условий работы. Однако обычно удобно вводить учет отклонения размеров в коэффициент надежности по материалу. Безопасность сооружения зависит также от объема знаний о свойствах грунтов и оснований, т. е. от качества проведения инженерно-геологических исследований перед началом строительства. Учет изменчивости свойств грунтов также возможен

применением соответствующего коэффициента надежности по материалу.

Расчетные значения характеристик материалов и грунтов получаются делением нормативных значений на указанный коэффициент с последующим умножением на коэффициент условий работы.

Коэффициент надежности по материалу для второй группы предельных состояний, как правило, принимается равным 1 и не зависит от нагрузки.

Приведем в качестве примера коэффициенты из TGL 33403 [4.29]: для прочности бетона на сжатие 1,3; для прочности бетона на растяжение 1,5; для прочности арматуры на растяжение 1,15.

### Коэффициент условий работы

В любом расчете приходится вводить упрощающие гипотезы о поведении систем, поперечных сечениях, материалах, основаниях и т. д. с тем, чтобы расчет можно было выполнить при разумных затратах. Вследствие этого возникают ошибки, так называемые неточности модели, имеющие систематический или случайный характер. Чтобы учесть влияние этих ошибок на надежность конструкции, вводятся коэффициенты условий работы.

Из перечисленного выше видно, что с их помощью можно учесть разнообразное влияние. Коэффициенты условий работы вводятся как к нагрузке, так и к сопротивлению. Нормы TGL 33403 содержат коэффициенты условий работы для бетона и арматуры в зависимости от различных воздействий, таких, как циклическое нагружение, кратковременное импульсное нагружение, длительные нагрузки и т. д. Здесь учитываются также влияние способа изготовления и отклонения геометрических размеров.

Кроме того, этим коэффициентом может быть учтена повышенная вероятность отказа больших систем при учете очень малого числа предельных состояний.

## 5. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ К НОРМИРОВАНИЮ

### 5.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Можно различать два вида практического применения теории надежности несущих конструкций:

прямое применение при проектировании или проверке методами теории надежности;

косвенное использование при назначении элементов безопасности (прежде всего частных коэффициентов надежности) в нормах.

Прямое применение требует разработки существенно более сложных моделей по сравнению с традиционными инженерными моделями безопасности. Существенно возрастают и требования к исходным данным, а также к уровню теоретической подготовки специалистов. Поэтому не удивительно, что прямое применение теории к оценке надежности строительных конструкций сегодня ограничено только частными случаями.

При косвенном использовании теории проектировщику остается проверка надежности в обычной форме расчета с частными коэффициентами. Содержащиеся в нормах элементы безопасности определяются с помощью аппарата теории надежности так, чтобы обеспечить заданный уровень безопасности, выраженный через допустимую вероятность отказа или требуемый индекс безопасности, возможно более точным образом.

Предельное состояние, которое за время службы сооружения может быть превзойдено с вероятностью, не большей  $P_f$ , выражается уравнением

$$g(x, A) = 0 \quad (5.1)$$

и соответствующим запасом прочности

$$Z = g(X, A), \quad (5.2)$$

где  $X$  — вектор базисных переменных;  $A$  — величина, определяемая в процессе проектирования (большая часть параметров поперечного сечения).

Расчет по нормам ведется с детерминированными нормативными величинами  $x_i^{(n)}$  и частными коэффициентами надежности  $\gamma_i$  вместо случайных величин  $X_i$ . При этом уравнение (5.1) в нормах принимает вид:

$$\bar{g}(x^{(n)}, \gamma, A) = 0 \quad (5.3)$$

(черточка над  $g$  означает также, что расчет по нормам ведется на упрощенных моделях). Механическая модель в нормах и механическая модель в теории надежности не всегда идентичны.

В дальнейшем предполагается, что нормативные значения  $x_i^{(n)}$  определяются как квантили, а коэффициенты надежности  $\gamma_i$  назначаются в нормах так, чтобы при проектировании по нормам точно или приближенно выдержать заданные  $\text{zul } P_f$  или  $\text{erf } \beta$ .

Рассмотрим сначала простейшие случаи проверки на безопасность.

### 5.2. ОБЩИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПАСА

Рассмотрим уравнение предельного состояния (5.1) и уравнение по нормам (5.3) с одним неизвестным общим коэффициентом надежности  $\gamma$ , определяемым так, чтобы  $P_f = \text{zul } P_f$ .

Обозначим через

$$A = \bar{g}^{-1}(x^{(n)}, \gamma) \quad (5.4)$$

разрешенное относительно  $A$  нормативное уравнение и учтем формулу (5.2). Получаем уравнение для определения  $\gamma$ :

$$P\{g[X, \bar{g}^{-1}(x^{(n)}, \gamma)] < 0\} = \text{zul } P_f. \quad (5.5)$$

Уравнение с одним неизвестным не представляет трудностей для решения, если оно возможно численным методом.

Рассмотрим решение для двух простых случаев, когда оно возможно в замкнутом виде.  $R$ — $S$ -модель с нормально распределенными случайными величинами:  $X_1 = R$  — прочность или предел текучести материала;  $X_2 = S$  — напряжение от внешней нагрузки.

Уравнение предельного состояния:  $g = A x_1 - x_2 = 0$ .

$$\text{Нормативное уравнение: } \bar{g} = A x_1^{(n)} - \gamma x_2^{(n)} = 0. \quad (5.6)$$

Проектное уравнение:  $A = \gamma (x_2^{(n)} / x_1^{(n)})$ .

Индекс безопасности по формуле (3.35)

$$\beta = (A m_{X_1} - m_{X_2}) / \sqrt{A^2 \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2} \quad (5.7)$$

должен быть равен заданному требуемому индексу  $\text{erf } \beta = -\Phi^{-1}(\text{zul } P_f)$ .

Подставляя формулу (5.6) в выражение (5.7) и обозначая нормативные значения через значения квантилей  $q_i$ , определим:

$$x_i^{(n)} = m_{X_i} + \sigma_{X_i} \Phi^{-1}(g_i). \quad (5.8)$$

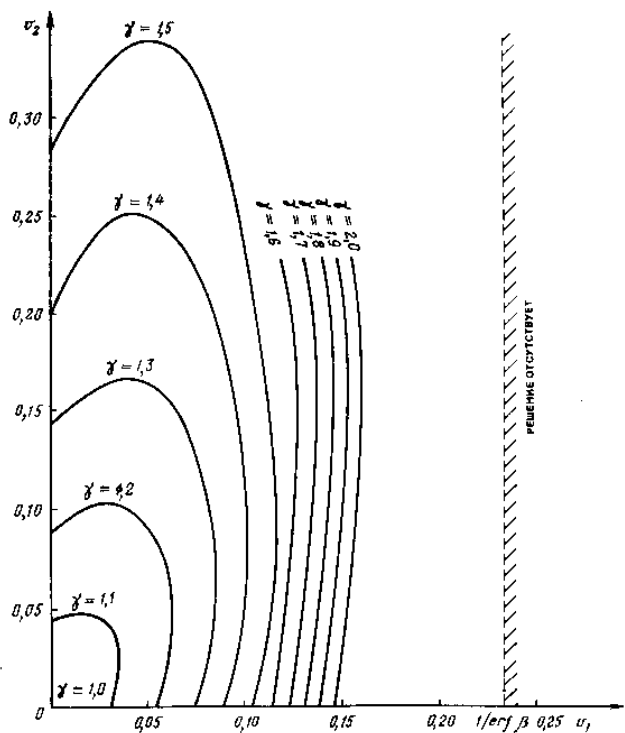


Рис. 5.1. Соотношения между общим коэффициентом запаса и коэффициентами вариации сопротивления  $v_1$  и напряжения  $v_2$  для заданной вероятности отказа; сопротивление и напряжение распределены по нормальному закону

Исключая  $\gamma$ , после элементарных преобразований находим:

$$\gamma = \frac{1 + v_1 \Phi^{-1}(q_1)}{1 + v_2 \Phi^{-1}(q_2)} \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - v_1^2 \text{erf } \beta^2)(1 - v_2^2 \text{erf } \beta^2)}}{1 - v_1^2 \text{erf } \beta^2}, \quad (5.9)$$

где  $v_1 = \sigma_{X_1} / m_{X_1}$ ;  $v_2 = \sigma_{X_2} / m_{X_2}$ .

На рис. 5.1 это соотношение представлено для случая  $\text{zul } P_f = 10^{-5}$  ( $\text{erf } \beta = 4,265$ ) и значений квантилей для прочности  $q_1 = 0,05$  и для нагрузки  $q_2 = 0,95$ .

Выражение (5.9) справедливо только в области малых коэффициентов вариации для сопротивления  $v_1$ . Из этого выражения следует, что положительный коэффициент запаса  $\gamma$

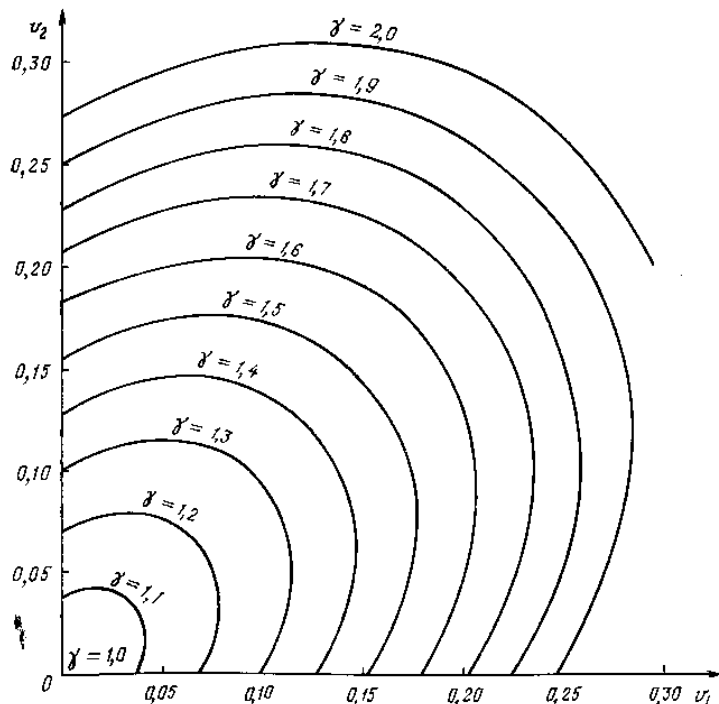


Рис. 5.2. Соотношения между общим коэффициентом запаса и коэффициентами вариации сопротивления  $v_1$  и напряжения  $v_2$  для заданной вероятности отказа; сопротивление и напряжение имеют логнормальное распределение

получается только при  $v_1 < 1/\text{erf } \beta$ . Причина этого явления заключается в том, что мы приняли плотность распределения сопротивления неограниченной с обеих сторон. Предположение о нормальном распределении означает, что вероятность  $\Phi(-1/v_1)$  соответствует «отрицательной прочности». При коэффициенте вариации  $v_1 > 1/\text{erf } \beta$  эта вероятность превышает допустимую вероятность отказа. Следовательно, выражение (5.9) дает приемлемые результаты только при  $v_1 < 1/\text{erf } \beta$ . Этот пример подчеркивает большое влияние выбора типа распределения на конечный результат.

Подобные явления не имеют места, если выбрать тип распределения, не допускающий отрицательных значений. Если, например, считать  $X_1$  и  $X_2$  распределенными логнормально в стандартной форме, то получим:

$$\gamma = \exp \left[ \text{erf } \beta \sqrt{\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2} + \sigma_{U_1} \Phi^{-1}(q_1) - \sigma_{U_2} \Phi^{-1}(q_2) \right], \quad (5.10)$$

где

$$\sigma_{U_1} = \sqrt{\ln(1+v_1^2)}; \quad \sigma_{U_2} = \sqrt{\ln(1+v_2^2)}.$$

На рис. 5.2 представлено соотношение (5.10) с теми же исходными данными. Разница между результатами, полученными по обем модели, с увеличением коэффициентов вариации очевидна.

**Пример 5.1.** Каков общий коэффициент запаса (для случая, рассмотренного в примере 3.22), который гарантирует индекс безопасности  $\text{erf } \beta = 4$  при образовании пластического шарнира? Нормативные значения составляют:

$$x_1^{(n)} = 24 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 \text{ (предел текучести стали)}; \quad x_2^{(n)} = 22 \text{ кН}.$$

Из нормативного уравнения  $\bar{g} = A x_1^{(n)} - \gamma x_2^{(n)} = 0$  получаем с вычисленным в примере 3.22 для  $\text{erf } \beta = 4$  значением  $A = W_{pl} = 2,709 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ .

$$\gamma = \frac{A x_1^{(n)}}{1 x_2^{(n)}} = \frac{2,709 \cdot 10^{-4} \cdot 24 \cdot 10^4}{2 \cdot 22} = 1,478.$$

### 5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НАДЕЖНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЕКТНОЙ ТОЧКИ

Если в нормах содержится несколько частных коэффициентов надежности, то в определяющем уравнении (5.5) появляется много неизвестных  $\gamma_i$ . Когда имеет место одно уравнение со многими неизвестными, можно найти бесконечное множество векторов частных коэффициентов надежности  $\gamma$ , удовлетворяющих условию  $P_f = \text{zul } P_f$  или  $\beta = \text{erf } \beta$ . Для определения множества решений сначала проводится

расчет методами теории надежности (п. 3.3), и для заданного  $\text{erf } \beta$  определяется проектная величина  $A$  и соответствующая проектная точка  $x^*$ . Следовательно, определяется величина  $A$ , при которой поверхность предельного состояния в  $y$ -пространстве касается гиперсферы радиусом  $\text{erf } \beta$ . Если механическая модель предельного состояния  $g(x, A) = 0$  и нормативное уравнение  $\bar{g}(x^{(n)}, A) = 0$  подобны по своему строению, то сравнением этих двух уравнений приходим к выводу, что решение имеет место, если расчетные значения  $x^{(c)}$  выбраны так, что они лежат на этой касательной поверхности предельного состояния.

Из бесконечного множества точек на поверхности предельного состояния нужно выбрать одну, соответствующую решенной задаче. Целесообразно принять за таковую точку, в окрестности которой случай отказа наиболее вероятен, а плотность распределения достигает своего максимального значения. Эта точка, однако, и есть проектная. Расчетные значения определяются в проектной точке исходного пространства:

$$x^{(c)} = x^*, \quad (5.11)$$

Теперь становится понятным само название проектной точки. Если даны нормативные значения  $x^{(n)}$ , то легко определить частные коэффициенты надежности. Так, для коэффициента надежности по материалу

$$\gamma_{m,i} = x_i^{(n)} / x_i^*, \quad (5.12)$$

а для нагрузки

$$\gamma_{f,i} = x_i^* / x_i^{(n)}. \quad (5.13)$$

**Пример 5.2.** Каковы коэффициенты надежности по материалу  $\gamma_m$  и по нагрузке  $\gamma_f$  для случая, рассмотренного в примере 3.22?

Из нормативного уравнения  $\bar{g} = \frac{A}{\gamma_m} x_1^{(n)} - \gamma_f x_2^{(n)} = 0$  по вычисленным в примере 3.22 координатам проектной точки получаем по выражениям (5.12) и (5.13):

$$\gamma_m = x_1^{(n)} / x_1^* = 24 \cdot 10^4 / (23,34 \cdot 10^4) = 1,028;$$

$$\gamma_f = x_2^* / x_2^{(n)} = 31,63 / 22 = 1,438.$$

Введем в зависимости (5.12) и (5.13) выражения для координат проектной точки:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{m,i} &= \frac{x_i^{(n)}}{F_{X_i}[\Phi^{-1}(y_i^*)]} = \frac{x_i^{(n)}}{F_{X_i}[\Phi^{-1}(-\alpha_i \text{erf } \beta)]}; \\ \gamma_{f,i} &= F_{X_i}[\Phi^{-1}(-\alpha_i \text{erf } \beta)] / x_i^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Если, например, нагрузка подчиняется нормальному закону, то для коэффициента надежности по нагрузке получаем:

$$\gamma_{l,i} = \frac{1}{x_i^{(n)}} (m_{X_i} - \alpha_i \sigma_{X_i} \operatorname{erf} \beta), \quad (5.15)$$

а в случае логнормального распределения

$$\gamma_{l,i} = \frac{1}{x_i^{(n)}} [x_{0,i} + \exp(m_{U_i} - \alpha_i \sigma_{U_i} \operatorname{erf} \beta)],$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{U_i} &= \sqrt{\ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_{X_i}}{m_{X_i} - x_{0,i}} \right)^2 \right]}; \\ m_{U_i} &= \ln(m_{X_i} - x_{0,i}) - \sigma_{U_i}^2 / 2, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

и, наконец, для экстремального распределения I типа

$$\gamma_{l,i} = \frac{1}{x_i^{(n)}} \left( u - \frac{1}{a} \{ \ln [-\ln \Phi(-\alpha_i \operatorname{erf} \beta)] \} \right), \quad (5.17)$$

где  $a = 1,28255/\sigma_{X_i}$ ;  $u = m_{X_i} - 0,577216a$ .

Из этих соотношений видно, что частные коэффициенты надежности зависят от следующих показателей: требуемого уровня надежности, выражаемого через  $\operatorname{erf} \beta$ ; типов распределения базисных переменных  $x_i$  и их параметров распределения  $m_{X_i}$ ,  $\sigma_{X_i}$ ,  $x_{0,i}$  и т. д.;

коэффициентов чувствительности  $\alpha_i$ ;

нормативных значений  $x_i^{(n)}$ .

Среди этих величин только  $\alpha_i$  зависят от вида предельного состояния, и для их оценки необходимо решение на основе теории надежности. После определения коэффициентов чувствительности по вышеприведенным формулам без труда находятся частные коэффициенты надежности.

Оказывается, что коэффициенты чувствительности для обширного круга прикладных задач меняются незначительно, оставаясь примерно постоянными. Оценке этих коэффициентов в запас надежности во многом способствуют следующие условия:  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  для сопротивлений  $R_i$ ;  $-1 \leq \alpha_i \leq (-) 0$  для нагрузок  $S_i$ ; причем  $\sum_i \alpha_i^2 = 1$ .

Подобные оценки справедливы всегда, но даже такая консервативная оценка  $\alpha_1 = \pm \alpha_2 = \pm \alpha_3 = \dots = \pm 1$ , при которой не выполняется условие  $\sum_i \alpha_i^2 = 1$ , может быть использована.

Поскольку коэффициенты для материала не зависят от нагрузки, а коэффициенты для нагрузки не зависят от материала, в работах [3.3 и 5.2] было предложено представить их в виде:

$$\alpha_{R_i} = \tilde{\alpha}_R \tilde{\alpha}_{R_i}; \quad \alpha_{S_i} = \tilde{\alpha}_S \tilde{\alpha}_{S_i}. \quad (5.18)$$

где  $\tilde{\alpha}_R$  и  $\tilde{\alpha}_S$  — коэффициенты чувствительности для общего сопротивления и общей нагрузки, определяемые из уравнения предельного состояния  $r-s=0$  ( $R-S$ -модель);  $\tilde{\alpha}_{R_i}$  и  $\tilde{\alpha}_{S_i}$  — коэффициенты, которые зависят от относительного вклада величины  $R_i$  или  $S_i$  в общее сопротивление  $R$  или в общую нагрузку  $S$ .

Предположим, что можно оценить значение отдельных базисных переменных и ранжирование коэффициентов чувствительности по их величинам. Пусть  $R_i$  и  $S_i$  нумеруются так, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{R_1} &< \alpha_{R_2} > \alpha_{R_3} > \dots > \alpha_{R_l} > 0; \\ \alpha_{S_1} &> \alpha_{S_2} < \alpha_{S_3} < \dots < \alpha_{S_l} < 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

$R_i$  и  $S_i$  являются переменными, играющими наибольшую роль в данной задаче.

Для широкого класса предельных состояний к удовлетворительным результатам приводят следующие чисто эмпирические значения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\alpha}_R &= 0,8; \quad \tilde{\alpha}_S = -0,7; \\ \tilde{\alpha}_{R_i} &= \sqrt{i} - \sqrt{i-1} \quad i=1, 2, \dots; \\ \tilde{\alpha}_{S_i} &= \sqrt{i} - \sqrt{i-1} \quad i=1, 2, \dots; \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Для переменных  $R_i$  и  $S_i$  находим приближенные значения коэффициентов чувствительности:

$$\begin{array}{ll} \alpha_{R_1} = 0,8; & \alpha_{S_1} = -0,7; \\ \alpha_{R_2} = 0,331; & \alpha_{S_2} = -0,290; \\ \alpha_{R_3} = 0,254; & \alpha_{S_3} = -0,222; \\ \alpha_{R_4} = 0,214; & \alpha_{S_4} = -0,188. \end{array}$$

Поскольку для этих приближенных значений  $\sum_i \alpha_i^2 > 1$ ,

то величины коэффициентов надежности получаются в запас прочности. Использование этих значений предполагает, что известно, каково влияние отдельных случайных величин.

*Пример 5.3.* Вновь найдем коэффициенты надежности  $\gamma_m$  и  $\gamma_f$  примера 5.2 при  $\text{erf } \beta = 4$ , но теперь с использованием коэффициентов чувствительности по формуле (5.20):  $\alpha_1 = 0,8$  и  $\alpha_2 = -0,7$ .

Предел текучести стали отвечает логнормальному закону распределения. Приняв параметры его по примеру 2.1, вычислим по выражениям (5.14) и (5.16)

$$\gamma_m = \frac{x_1^{(A)}}{x_{0,1} + \exp(m_U - \alpha_1 \sigma_U \text{erf } \beta)} = \frac{24 \cdot 10^4}{16 \cdot 10^4 + \exp(11,534 - 0,8 \cdot 0,2348 \cdot 4)} = 1,153.$$

Нагрузка  $X_2$  имеет экстремальное распределение I типа; по формуле (5.17) получаем:

$$\gamma_f = \frac{1}{22} \left( 17,1 - \frac{1}{0,6413} (\ln [-\ln \Phi(0,7 \cdot 4)]) \right) = -1,2.$$

Сравнение с результатами примера 5.2 говорит о том, что приближение (5.20) для этого случая слишком грубое.

#### 5.4. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотренные выше методы предполагают, что каждой базисной переменной  $X_i$  соответствует свой частный коэффициент надежности. Это часто входит в противоречие со стремлением сделать расчетные формулы в нормах как можно более простыми, содержащими минимальное число коэффициентов. При этом, однако, нормы должны иметь возможно большую область применения и учитывать разнообразные условия нагружения и физико-механические характеристики конструкций.

Метод, представленный в п. 5.3, предполагает также, что уравнение предельного состояния  $g=0$  не содержит существенных упрощений и согласуется с уравнением  $g=0$ . Это не всегда удается выдержать. Поэтому требуются более общие методы определения коэффициентов надежности, не зависящие от выбранного формата норм.

В нормах с широкой областью применения число проектных проверок значительно превосходит число рассматриваемых в качестве неизвестных частных коэффициентов надежности. В таком случае неизбежно отклонение от заданного уровня надежности, определенного методами теории надежности.

Поэтому делаются попытки назначить коэффициенты надежности в нормах так, чтобы эти неизбежные в различных задачах отклонения от заданного уровня надежности были

минимальны. Таким образом, задача отыскания значений коэффициентов надежности становится задачей оптимизации. Эту проблему оптимизации норм не следует путать с проблемой оптимизации отдельной конструкции при ограничениях, задаваемых нормами.

Задача определения оптимальных значений коэффициентов надежности может формулироваться разными способами, смотря по тому, что понимается под «отклонением» и в каком направлении можно допустить это отклонение.

Наиболее простой кажется минимизация квадрата разности вероятностей отказа, т. е. требование

$$\min \left\{ \int_{\{u|u \in \Omega\}} [P_{fz} - P_f(\gamma, u)]^2 w(u) du \right\}, \quad (5.21)$$

где  $P_f$  — вероятность отказа для какого-либо проектного случая по нормам;  $P_{fz}$  — желательное значение вероятности отказа, которое должно выдерживаться в среднем;  $\gamma$  — вектор неизвестных частных коэффициентов надежности, который находится из решения оптимальной проблемы (5.21);  $u$  — вектор случайных величин, которые определяют область действия норм;  $\Omega$  — область действия норм в  $u$ -пространстве;  $w(u)$  — весовая функция, учитывающая неравномерность распределения проектных случаев в области  $\Omega$ .

Выражение (5.21) включает применение метода наименьших квадратов к определению частных коэффициентов надежности. Разыскивается вектор  $\gamma$ , при котором интеграл от квадрата отклонений между вероятностью отказа отдельного проектного случая  $P_f$  и заданным значением  $P_{fz}$ , взятый по всей области определения норм, минимален. При численном решении интеграл часто замещается суммой представительного множества отдельных проектных случаев [5.5, 5.6].

При таком подходе к оптимизации допускаются отклонения  $P_f$  как в сторону области отказа, так и в сторону области безотказной работы. Однако в случае, когда заданный уровень  $\text{zul } P_f$  должен выдерживаться с гарантией, величину  $P_{fz}$  следует принять на определенное значение  $\Delta P_f$  меньше, чем  $\text{zul } P_f$ . До проведения расчета величина  $\Delta P_f$  неизвестна и должна быть оценена. Она зависит, в основном, от области действия норм и степени приближенности расчетных формул в них. Эти зависимости можно наглядно представить в плоскости  $P_f - A$ . Каждая из норм  $n$  образует здесь область определения  $\Omega^{(n)}$ . Стратегия минимизации квадрата отклонения от  $P_{fz}$  в обе стороны показана на рис. 5.3. Нормы тем лучше приближаются к этому значению, чем гибче их формат, т. е. чем меньше область действия и чем больше коэффициентов надежности входит в этот формат.

Амплитуду отклонения в сторону отказа  $\{\Delta P_f\}$  целесообразно принимать по возможности малой.

Были предложены и исследованы в отношении амплитуды отклонений другие формулировки задачи с иными показателями надежности:

$$\min \left( \int [\log P_{fz} - \log P_f(\gamma, u)]^2 w(u) du \right); \quad (5.22)$$

$$\min \left\{ \int [\beta_z - \beta(\gamma, u)]^2 w(u) du \right\}; \quad (5.23)$$

$$\min \left\{ \int [\ln \beta_z - \ln \beta(\gamma, u)]^2 w(u) du \right\}. \quad (5.24)$$

Всюду интегрирование распространено на область действия норм. Задачи (5.21) — (5.24) объединяет то, что они опе-

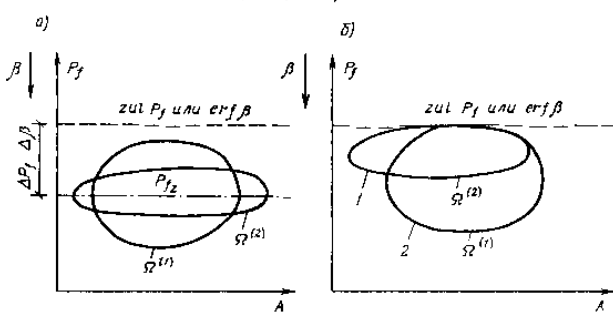


Рис. 5.3. Различные стратегии оптимизации, представленные на области определения  $\Omega$  в  $P_f$ - $A$ -плоскости

а — минимизация квадрата отклонения значения  $P_{fz} < Zul P_f$ ; б — минимизация одностороннего отклонения от допускаемого предельного значения  $Zul P_f$ ; 1 — гибкий формат норм; 2 — простой формат норм

рируют с мерами надежности. Но проблему можно представить и через характеристики поперечных сечений, определяемые в процессе проектирования [5.6]. Для этого сначала определяются эти характеристики для проектных случаев из области действия норм, с помощью методов теории надежности. Если  $A_z$  — характеристика сечения, найденная при вероятности отказа  $P_{fz}$ , т. е. значение, удовлетворяющее условию  $P_{fz} = P[g(x, A_z) < 0]$ , и  $A$  — параметр поперечного сечения, найденный в соответствии с нормами, то можно поставить требование:

$$\min \left( \int [A_z(u) - A(\gamma, u)]^2 w(u) du \right). \quad (5.25)$$

Оптимальное значение  $A_z$  является переменным в  $u$ -пространстве.

Условие (5.25) обладает большими преимуществами при численной реализации, поскольку подобные задачи боль-

шей частью могут быть решены итерационными способами. Рис. 5.4, а поясняет порядок решения для задачи (5.23). Проблема оптимизации и проблема надежности здесь неразрывно связаны. Для задачи (5.25) проблема надежности и проблема оптимизации разделяются и могут решаться последовательно (рис. 5.4, б). Сначала решается проектная задача для ситуа-

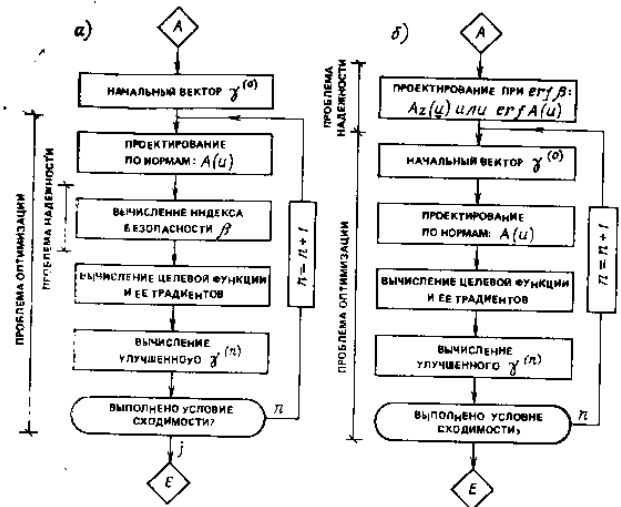


Рис. 5.4. Примерная схема различных вариантов оптимизации норм

а — решение относительно показателей безопасности по формуле (5.23) или (5.26); б — решение относительно параметров поперечного сечения по формуле (5.25) или (5.27)

ции из области определения норм для  $P_{fz}$  методами теории надежности и находятся параметры поперечного сечения  $A_z$ . При использовании теории надежности 1-го порядка задача проектирования едва ли сложнее, чем задача проверки конструкций по надежности. Результаты  $A_z$  заносятся в память и служат целевыми значениями при последующем решении задачи оптимизации.

При этом находятся частные коэффициенты надежности, при которых результаты проектирования по нормам наилучшим образом соответствуют результатам проектирования на основе методов теории надежности.

Если оператор  $A(\gamma, u)$  линеен относительно  $\gamma$ , то задача (5.25) приводит к линейной системе уравнений [5.6].

Все эти варианты, использующие средние целевые значения  $P_{fz}$  или  $A_z$ , допускают отклонения как в сторону области отказа, так и в сторону области безотказной работы. Это находится в противоречии с тем фактом, что отклонения от уровня безопасности в обе стороны ведут к совершенно разным последствиям (см. рис. 3.37). Чтобы быть последовательными, следует допускать отклонения от допускаемой вероятности отказа только в одну сторону, а именно в сторону безопасной области.

Принцип односторонних отклонений был подробно рассмотрен в работе [5.6]. При этом получена формулировка задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} \min \{ \int \beta(\gamma, u) w(u) du | \gamma \in C \}; \\ C = \{ \gamma \in B | \beta(\gamma, u) \geq \text{erf} \beta \forall u \in \Omega \}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

или относительно параметров сечения

$$\begin{aligned} \min \{ \int A(\gamma, u) w(u) du | \gamma \in C \}; \\ C = \{ \gamma \in B | A(\gamma, u) \geq \text{erf} A(u) \forall u \in \Omega \}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

где  $B$  — заданное множество векторов, на которых разыскивается оптимальное решение, а  $\text{erf} A$  — параметр поперечного сечения, определяемый методами теории надежности при вероятности отказа  $\text{erf} P_f$ , т. е.  $P[g(x, \text{erf} A) < 0] = \text{erf} P_f$ .

Выражение (5.27) требует, чтобы интеграл от взвешенных значений параметров поперечного сечения, взятый по всем проектным случаям норм, принимал минимальное значение при условии, что эти параметры всегда больше, чем  $\text{erf} A$ . Другими словами,  $\gamma$  следует выбирать так, чтобы допускаемые вероятности отказа для всей области действия норм выдерживались с минимальной суммой параметров поперечного сечения. Это вполне приемлемое требование.

При численном решении выражения (5.26) или (5.27) имеют значение некоторые свойства этих оптимальных задач.

1. Коэффициенты надежности могут принимать только определенные дискретные значения. Проектировщика не интересует теоретический минимум со многими значащими цифрами после запятой. Ему нужны оптимальная величина и множество округленных величин. Следовательно, здесь имеет место проблема дискретной оптимизации. Оптимальный вектор  $\gamma$  выбирается из конечного множества векторов (обозначенного  $B$ ) с учетом практики строительства.

2. Для преобладающего большинства проблем надежности при статическом нагружении имеют место следующие свойства монотонности:

$$A(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i^{(1)}, \dots, \gamma_m) \leq A(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i^{(2)}, \dots, \gamma_m) \text{ при } \gamma_i^{(1)} < \gamma_i^{(2)}. \quad (5.28)$$

Другими словами, большим коэффициентам надежности не могут соответствовать меньшие размеры поперечного сечения:

$$P_f(A_1) > P_f(A_2) \text{ при } A_1 < A_2, \quad (5.29)$$

или большим размерам поперечного сечения соответствуют меньшие вероятности отказа.

С помощью зависимостей (5.28) и (5.29) можно получить свойства монотонности целевых функций проблем оптимизации (5.26) и (5.27):

$$Z(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i^{(1)}, \dots, \gamma_m) \leq Z(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i^{(2)}, \dots, \gamma_m) \text{ при } \gamma_i^{(1)} < \gamma_i^{(2)}, \quad (5.30)$$

или большим коэффициентам надежности не могут соответствовать меньшие значения целевых функций.

3. На основе инженерной интуиции, исходя из значимости отдельных частных коэффициентов надежности в формате норм, почти всегда можно указать большие области в  $\gamma$ -пространстве, где определено не может находиться минимум.

Эти свойства облегчают практическое применение способа систематического просмотра или перебора при численном решении задач. В работе [5.6] показано применение способа перебора на примере.

Практическое решение зависимостей (5.21) — (5.24) показывает, что результаты очень сильно зависят от выбора целевой функции. Однако эта зависимость исчезает в формулировках задачи, где допускается одностороннее отклонение — выражения (5.26), (5.27) и др. Эта чувствительность к выбору целевой функции совершенно исчезает в простых форматах норм с одним коэффициентом запаса, в случаях с двумя частными коэффициентами надежности и почти исчезает в более сложных форматах норм.

Классы проектных случаев, которые приходится принимать во внимание в этих расчетах, весьма обширны. Назначаемые в различных нормах коэффициенты связаны между собой и оказывают взаимное влияние. Теоретически вся система нормативных документов должна оптимизироваться одновременно, что сегодня выглядит совершенно нереальным делом. Не остается ничего иного, как делить эту глобальную задачу на части, и решать эти частные проблемы порознь.

Естественная линия деления проходит между нагрузкой и сопротивлением. Раздельное рассмотрение возможно, если



допустимо разделение уравнений предельных состояний на члены, зависящие только от нагрузки, и члены, зависящие только от сопротивления, подобно тому как это делалось в выражениях (3.17) и (3.18).

В этом случае на первом шаге определяются оптимальные значения вероятностей превышения или непревышения для проектных значений сопротивления и нагрузки с помощью  $R-S$ -модели. На втором и третьем шагах определяются частные коэффициенты надежности порознь для сопротивления и нагрузки так, чтобы по возможности сохранить определенные на первом шаге квантили. Подробности можно найти в работе Гавранека и Кремера [5.8].

Конечно, такое расщепление проблемы оптимизации уменьшает эффективность решения и должно рассматриваться как вынужденный прием упрощения чрезвычайно сложной задачи.

Еще раз напомним, что сближение методов в нормах и методов теории надежности, возможно, тем теснее, чем гибче формат норм, чем больше в этом формате содержится частных коэффициентов надежности и чем уже область действия норм.

Для удобства применения норм в проектировании желательно как раз обратное — простой формат норм и обширная область их применения. Это ведет однако к большим отклонениям от уровня  $\ln P_f$  или  $\ln \beta$ , что связано с большей



Рис. 5.5. Падение относительной материалоемкости с увеличением гибкости формата норм при одинаковой допустимой вероятности отказа

материалоемкостью. На рис. 5.5 показаны результаты решения примера из работы [5.6]. С увеличением числа коэффициентов надежности в нормах снижаются и затраты материала, определяемые проектом, стремясь к затратам, определенным для индивидуального проектного решения методами теории надежности. Упрощение норм оборачивается повышенным расходом материалов.

## 6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

### 6.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Применение методов теории надежности ставит большие требования не только в теоретическом плане, но в отношении уровня информации о базисных переменных, которые выступают как исходные данные. Главными при этом являются данные о типах распределений и рамках, в которых находятся параметры этих распределений. Поскольку статистические параметры зависят от объема выборки и условий ее получения, то проявляется определенная их изменчивость. Естественно, эти данные достаточно приближительные. Они ограничиваются несколькими важнейшими величинами и во многих отношениях несовершенны.

Приводимая здесь информация не может заменить собственных стараний исследователя по сбору данных, необходимых для решения проблем методами теории надежности.

Ниже дается обзор величин параметров распределений, помогающих при задании исходных данных. Для базисных переменных, коэффициенты чувствительности которых для рассматриваемого предельного состояния малы, эти данные могут оказаться достаточными.

### 6.2. СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

#### 1. СТАЛЬ

Предел текучести строительных сталей является важнейшей характеристикой прочности. Если на диаграмме нет площадки текучести, то предел текучести определяется как  $\sigma_{0,2}$ , т. е. как напряжение, для которого остаточная деформация после разгрузки составит 0,2%.

Изменчивость или разброс для этой величины зависит от того, какое рассматривается множество. Изменением свойств в пределах одного стержня фермы чаще всего можно пренебречь. До длины 10 м коэффициент корреляции  $\rho$  достаточно точно можно считать равным 1. При больших длинах профили могут быть изготовлены из шихты разного состава. Еще больший разброс наблюдается для сталей, изготовленных

на разных заводах. Очевидно, здесь влияет различие в технологии изготовления и контроля качества.

При назначении стандартного отклонения или коэффициента вариации как исходных данных для решения задачи надежности следует учитывать эти обстоятельства и оценивать их в соответствии с целями исследования. Если, предположим, исследования проводятся с целью разработки национальных норм, то представляет интерес сталь всех заводов-изготовителей.

Для арматурной стали предел текучести зависит также от площади, к которой относится усилие растяжения при определении этого предела, т. е. к номинальной или фактической площади испытываемого стержня. При делении на номинальную площадь предел текучести и вычисляемые по нему величины зависят также от разброса допусков при прокатке стали.

Коэффициенты вариации предела текучести, по данным различных источников, имеют следующие границы: один и тот же стальной профиль с одного завода  $v=0,01\div 0,04$ ; различные профили с одного завода  $v=0,04\div 0,07$ ; одинаковые профили с разных заводов  $v=0,05\div 0,08$ ; различные профили с разных заводов  $v=0,06\div 0,12$ . Для стального листа эти значения составляют  $v=0,06\div 0,12$ .

Для высокопрочных сталей стандартное отклонение увеличивается, но, как правило, не так сильно как среднее, в связи с чем коэффициент вариации падает. Для менее прочных сталей принимают верхние из вышеприведенных значений коэффициентов вариации, а для высокопрочных — нижние. В качестве возможных типов распределения в литературе называют нормальное, логнормальное, урезанное нормальное, бета-распределение и экстремальное типа I. Большинство гистограмм имеет положительный коэффициент асимметрии, что является следствием действия системы контроля качества, отбраковывающего низкосортную сталь. Вследствие этого всегда существует некоторое минимальное значение предела текучести. Поэтому кажется оправданным использование распределения с левой границей, например, сдвинутого логнормального распределения. Теоретически (см. п. 5.2) не рекомендуется применять распределения, уходящие слева в бесконечность.

Предел прочности на 50% превосходит предел текучести для низколегированных сталей и на 10—25% для высокопрочных. Коэффициент вариации для предела прочности несколько меньше, чем для предела текучести. Для обоих пределов можно принимать одинаковые типы распределений. Между ними существует корреляция с коэффициентом около 0,75.

Для модуля упругости коэффициент вариации колеблется от 0,02 до 0,06.

При проверке на усталость важно знать положение линии Велера, которое существенно зависит от случайных влияний. Для предела выносливости и угла наклона линии Велера хорошее приближение дает логнормальное распределение. При наличии концентраторов напряжений в деталях конструкции уменьшается как предел выносливости, так и угол наклона линии. По Квелю и Гайднеру [3.71], среднее значение предела выносливости снижается с 392 до 113 Н/мм<sup>2</sup> (сталь St52) для сильно подрезанных сварных соединений. Коэффициент вариации составляет около 0,07 для материала и 0,11—0,25 при сварных соединениях. Среднее значение угла наклона линии Велера снижается от 10,57 до 2,97 при резкой концентрации напряжений. Коэффициент вариации колеблется от 0,20 до 0,50.

## 2. БЕТОН

Важнейшей причиной изменчивости свойств бетона служат изменчивость свойств его компонентов, разбросы в подборе состава, случайные влияния в процессе перемешивания, транспортирования, укладки и последующего твердения, а также различия в системе контроля качества и методов испытаний.

Данные о прочности на сжатие показывают, что для средних и высокопрочных бетонов стандартное отклонение почти постоянно, а для низкосортных бетонов постоянно коэффициент вариации. Прочность бетонов составляет 12,5—28 Н/мм<sup>2</sup> [6.4, 6.7]. Статистические параметры распределения прочности на сжатие зависят от качества изготовления и контроля.

В табл. 6.1 приведены данные о порядке величин коэффициентов вариации и стандартных отклонений. В этих величинах, естественно, содержится разброс, вызываемый самими испытаниями. Он может быть установлен путем отбора проб из одного замеса. Разброс в испытаниях характеризуется коэффициентом вариации  $v=0,005\div 0,08$  (в среднем  $v=0,04$ ).

Многие исследователи приходят к выводу, что распределение прочности бетона на сжатие лучше всего представляется нормальным законом. Рюш и др. [6.6] нашли, что из 829 выборок 92,8% соответствовали нормальному распределению. Остальные выборки имели примерно поровну положительный и отрицательный коэффициент асимметрии или отвечали смешанному распределению.

Прочность бетона в сооружении, очевидно, несколько ниже, чем в кубиках. По соответствующим данным американских исследований, прочность вырезанных из тела бетона цилиндров [6.4] колебалась от 0,74 до 0,96 (в среднем около 0,87). Хенцель и Грубе [6.10] получили среднее соотношение прочности кернов и кубиковой прочности около 0,79.

Прочность бетона на сжатие значительно зависит от ско-

рости нагружения или деформаций. Чем выше скорость деформирования, тем больше прочность бетона на сжатие. Исчерпывающую подборку результатов исследований этой проблемы можно найти в работе Мюллера, Кайнца и Шарльс [6.11]. Приведем приближенные зависимости, полученные Кенигом и Даргелем [6.12] и охватывающие наиболее интересные области:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{d, dyn} &= (1,10 + 9,06 \cdot 10^{-3} \ln |\dot{\epsilon}|) \sigma_x \\ &\text{при } 10^{-8} \text{ с}^{-1} < |\dot{\epsilon}| < 0,191 \text{ с}^{-1}; \\ \sigma_{d, dyn} &= (1,30 + 0,13 \ln |\dot{\epsilon}|) \sigma_d \\ &\text{при } 0,191 \text{ с}^{-1} < |\dot{\epsilon}| < 10^2 \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \right\} (6.1)$$

При очень кратковременных (типа ударных) нагрузках наблюдается существенное повышение прочности. Об изменении стандартного отклонения в зависимости от скорости деформирования данных практически нет, однако предполагается, что это влияние пренебрежимо мало.

Для зависимости между прочностями бетона на сжатие  $\sigma_d$  и на растяжение  $\sigma_z$  существует много эмпирических формул. Выражение  $\sigma_z = 0,232 (\sigma_d)^{2/3}$  рекомендуется ЕТУ.

По имеющимся данным коэффициент вариации прочности на растяжение несколько больше, чем коэффициент вариации прочности бетона на сжатие. Для прочности на растяжение можно принять нормальное распределение.

Таблица 6.1. Стандартные отклонения и коэффициенты вариации прочности на сжатие для обычных тяжелых бетонов

Место бетона и уровень контроля	Коэффициент вариации для бетона со средней прочностью на сжатие $m < 20 \text{ Н/мм}^2$	Стандартное отклонение для бетона со средней прочностью на сжатие $m \geq 20 \text{ Н/мм}^2, \text{ Н/мм}^2$
Бетонные заводы с хорошими составляющими материалами, обученным персоналом и безупречным контролем изготовления	0,125—0,20 (0,15)	2,5—4,0 (3,0)
Большие стройплощадки с привозным бетоном и нормальными условиями изготовления и контроля	0,20—0,275 (0,225)	4,0—5,5 (4,5)
Малые стройплощадки с изготовлением бетона на месте	0,275—0,35 (0,30)	5,5—7,0 (6,0)

Примечание. В скобках даны средние значения.

### 3. ДРЕВЕСИНА

Древесина является естественным строительным материалом с очень большим разбросом прочностных характеристик. Она является штучным материалом и по нормированным правилам разделяется на классы по качеству.

Диаграмма растяжения-сжатия строительной древесины вдоль волокон представлена на рис. 6.1. В области растяже-

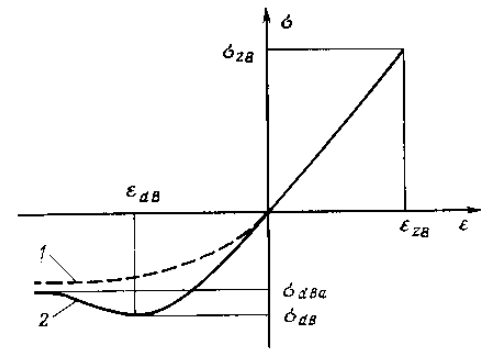


Рис. 6.1. Диаграмма для древесины при нагружении вдоль волокон  
1 — большое число пороков древесины;  
2 — нормальное качество древесины

ния она практически линейна, а дерево ведет себя при этом как хрупкий материал. При испытании на сжатие кривая напряжений — деформация существенно нелинейна. Математическая модель описания нелинейного поведения древесины приводится в работе Глоса [6.14]. По данным этой работы составлена табл. 6.2.

Таблица 6.2. Статистические параметры для европейской древесины хвойных пород

Параметр	Прочность			Модуль упругости	
	на сжатие	на растяжение	на изгиб		
Средние значения, Н/мм <sup>2</sup>	32	30	37	11 500	
Коэффициент вариации	0,18	0,35	0,27	0,22	
0,05-квантиль, Н/мм <sup>2</sup>	21	15	24	7000	
0,95-квантиль, Н/мм <sup>2</sup>	50	55	55	16 500	
Параметры экстремального распределения	$\chi_{\nu}, \text{ Н/мм}^2$	14	8	15	3500
	$\lambda^{-1/k}, \text{ Н/мм}^2$	20	26	26	9000
тип III	$k$	2,4—2,9	1,7—2,2	2,2—2,8	2,8—3,4
Наименьшие значения	2,6	2,0	2,5	3,1	

Данные табл. 6.2 относятся к материалу класса качества II при длительности испытаний 1—5 мин при температуре  $20 \pm 2^\circ\text{C}$  и влажности древесины 10—15%. Модули упругости для испытаний на растяжение, сжатие и изгиб практически одинаковы.

В качестве типа распределения хорошо подходит экстремальное распределение типа III для наименьших значений по формуле (2.56) (сдвинутое на  $x_0$  распределение Вейбула) и имеет абсолютный минимум  $x_0$ . Правомерность выбора именно этого типа распределения подтверждается теорией прочности хрупких материалов.

С увеличением влажности прочность древесины падает, что можно оценить по данным табл. 6.3 для пределов изменения влажности от 5 до 25%. При влажности больше 25% прочность практически не меняется.

Таблица 6.3. Изменения прочностных характеристик, %, при изменении влажности на  $\Delta u = 1\%$ ; базовое значение  $u = 12\%$  (по [6.14])

Параметр	Изменение характеристики при качестве древесины		
	низком (0,05-кварталь)	среднем (0,5-кварталь)	высоком (0,95-кварталь)
Прочность:			
на сжатие	$\mp 1$	$\mp 4$	$\mp 6$
> растяжение	0	0	$\mp 1$
> изгиб	0	$\mp 2$	$\mp 3,5$
Модуль упругости:			
при сжатии	$\mp 1$	$\mp 2$	$\mp 3,5$
> растяжении	0	0	0
> изгибе	0	$\mp 1$	$\mp 1,5$

Прочностные характеристики древесины снижаются с увеличением температуры. Исследования на малых образцах при температурах от  $-20^\circ$  до  $40^\circ\text{C}$  и влажности 10—15% дали результаты, которые приведены в табл. 6.4. Влияние температуры увеличивается с повышением влажности древесины.

Прочность возрастает с увеличением размера элемента, причём более интенсивно для высокопрочных пород дерева. Влияние размеров можно учесть редуцированным коэффициентом [6.14].

$$k_V = (V/V_0)^{-0,086}, \quad (6.2)$$

где  $V$  — объём элемента;  $V_0 = 1 \text{ м}^3$  — базовый объём.

Таблица 6.4. Изменение прочностных характеристик, %, при изменении температуры на  $\Delta T = 10^\circ$ ; базовое значение  $T = 20^\circ\text{C}$ ; влажность 10—15% (по [6.14])

Параметр	Изменение характеристики
Прочность:	
на сжатие	$\mp 5$
> растяжение	$\mp 1$
> изгиб	$\mp 5$
Модуль упругости	$\mp 3$

При длительном нагружении прочность древесины падает. Это уменьшение обычно учитывается множителем, меньшим или равным 0,85. При пропитке древесины огнезащитными составами прочность уменьшается на 10%. Защитные средства против грибов и насекомых практически не оказывают влияния на прочность.

#### 4. ГРУНТЫ

Являясь продуктом природы, грунт имеет существенно больший разброс характеристик свойств, чем искусственные материалы.

В связи с происхождением и изменениями от природных воздействий грунт крайне неоднороден, что затрудняет определение его характеристик. Кроме того, на определение свойств грунтов оказывают влияние разброс данных за счёт нарушений, возникающих при отборе пробы (разрыхление, уплотнение, изменение содержания воды), и разброс, обусловленный порядком проведения испытаний (например, за счёт систематических ошибок эксперимента). Следует иметь в виду, что свойства одного и того же грунта могут изменяться под влиянием динамических воздействий, процессов консолидации и т. д.

Необходимые характеристики грунтов определяются в процессе инженерно-геологических изысканий, а также полевых и лабораторных испытаний. В связи с большой стоимостью изысканий и экспериментов за исключением редких случаев невозможно получить исчерпывающий статистический материал.

В табл. 6.5 представлены данные о порядке величин коэффициентов вариации наиболее важных механических характеристик грунтов, полученные на основании исследований многих авторов (в особенности Лемба [6.17] и Шульца [6.18, 6.19]).

Как правило, исследователи исходят из того, что механические параметры грунтов распределены нормально, хотя при

малых вероятностях это не соответствует действительности, поскольку механические параметры не могут принимать отрицательных значений. Более подходящим является логнормальное распределение. В связи с возможностью учета коэффициента асимметрии и ограниченности области определения может подходить и бета-распределение.

Таблица 6.5. Коэффициенты вариации характеристик рыхлых пород в массиве

Параметр	Коэффициент вариации
Плотность	0,01—0,10
Естественное водосодержание	0,10—0,30
Предел пластичности	0,15—0,30
> текучести	0,10—0,35
Показатель пластичности	{ 0,30—0,60 *
	{ 0,15—0,50 **
> текучести	{ 0,20—0,50 *
	{ 0,10—0,30 **
Пористость	0,10—0,30
Кажущаяся когезия	0,15—0,50
Эффективная когезия	0,15—0,60
Эффективный угол трения	{ 0,10—0,25 ***
	{ 0,05—0,15 ****
Модуль деформации	0,20—0,40

- \* Для слабо- и среднесвязанных пород.
- \*\* Для сильносвязанных пород.
- \*\*\* Для слабо-, средне- и сильносвязанных пород.
- \*\*\*\* Для несвязанных пород.

### 6.3. НАГРУЗКИ

#### 1. СОБСТВЕННЫЙ ВЕС

Нагрузку от собственного веса можно разделить на нагрузку от веса несущей конструкции, которая не зависит от времени и может быть представлена случайной величиной, и нагрузку от веса несущих элементов, подверженную изменениям в течение срока службы. Эта последняя может моделироваться случайным процессом по рис. 2.9, г. Средний коэффициент обновления составляет  $\lambda = 0,02 \div 0,1$  в 1 год.

Возможными причинами неопределенности в предсказании нагрузки от собственного веса могут быть разбросы плотности материалов, отклонения геометрических размеров, неопределенность окончательного выбора материала, дополнительные нагрузки от соединений и креплений, последующие

перестройки и реконструкции, влияние окружающей среды (например, на содержание воды).

Собственный вес представляется произведением двух случайных величин — плотности и объема. По работе [6.22], коэффициент вариации для однородных строительных материалов составляет 0,02—0,07. Для металлов изменчивость плотности пренебрежимо мала. При использовании нормативных значений нагрузок от собственного веса при оценках надежности следует иметь в виду, что некоторые из этих значений содержат дополнительные добавки для повышения безопасности.

Процент армирования при определении собственного веса железобетона учитывается особо.

Для материалов, способных поглощать воду, следует учитывать содержание воды в максимально возможном количестве.

Изменчивость объема зависит от разброса геометрических размеров. Средние значения этих размеров обычно совпадают с проектными. Правда, в маломерных бетонных конструкциях прослеживается тенденция к увеличению средних размеров (до 2 см). Разброс вокруг среднего значения почти не зависит от абсолютных размеров. В табл. 6.6 представлены результаты оценки стандартных отклонений размеров несущих конструкций для различных видов материалов. По данным работы [6.24], коэффициент вариации площади для двутавров и уголков меняется от 0,02 до 0,03, а для труб составляет около 0,05. Стандартные отклонения толщины толстолистового металла составляют 0,3—0,4 мм.

Объем и плотность принимаются логнормально распределенными и независимыми друг от друга. В таком случае собственный вес как произведение обеих величин также распределен логнормально. Коэффициент вариации для несущих конструкций составляет 0,05—0,10. Коэффициент вариации для нагрузки от собственного веса надстройки и других несущих элементов, как правило, больше 0,10.

Таблица 6.6. Стандартные отклонения геометрических размеров элементов конструкций, мм (по работам [6.22, 6.24])

Конструкция	Размер поперечного сечения	Длина
Железобетонная	5—7	5—20
Стальная	0,1—1,5	5—10
Деревянная	5	5—20
Каменная	5—10	5—20

## 2. ПОЭТАЖНЫЕ НАГРУЗКИ В ЗДАНИЯХ

Этажная нагрузка является случайной функцией времени и пространства. Следует различать постоянную (или квази-постоянную) нагрузку и кратковременную.

Постоянные нагрузки действуют длительное время, оставаясь почти неизменными, пока не произойдет внезапное изменение их величин за счет, например, перестановки мебели или изменения функционального назначения здания. Примерами таких нагрузок служат нагрузки от мебели в жилых и административных зданиях, машин и оборудования в промышленных зданиях или веса товаров на складах или в универмагах. Как правило, к этим нагрузкам добавляются нагрузки от веса людей, которые живут или работают в этих зданиях при нормальных условиях эксплуатации. Подобные нагрузки математически очень хорошо представляются двухпараметрическими импульсными процессами с импульсами прямоугольной формы (см. п. 2.4).

Кратковременные нагрузки встречаются не очень часто, действуют недолго, но имеют относительно высокую интенсивность. Поэтому необходимо знать экстремальные значения этих нагрузок за срок службы сооружения. Примерами могут служить нагрузки при временном сборе мебели в одном месте во время ремонтных работ, собрание людей во время митингов и праздников, а также возможное скопление людей в условиях паники при чрезвычайных ситуациях. Подобные нагрузки математически представляются трехпараметрическими процессами с очень коротким периодом или спайк-процессами. Изменение во времени суммарной нагрузки представлено на рис. 6.2.

Случайная интенсивность нагрузки зависит также от места ее приложения. Пейр и Корнелл [6.32] разработали стохастическую модель, которая учитывает эту зависимость. Как теоретические исследования, так и практические измерения нагрузок показывают, что стандартное отклонение эквивалентной местной равномерно распределенной нагрузки зависит от рассматриваемой площади. Чем больше площадь, с которой собирается нагрузка для определения какого-либо внутреннего усилия, тем меньше стандартное отклонение, а вместе с тем и верхнее значение квантиля эквивалентной равномерно распределенной нагрузки.

Данные о проведенных измерениях нагрузок можно найти среди других, в работах Карманн [6.26], Митчелла и Будгейта [6.27, 6.28], Келвера [6.29], Коротиса, Дашни и Тсея [6.30, 6.31], Аппака, Бургмана, Сапожникова и Селью [6.33, 6.34], а также Эллишгвуда и Келвера [6.36]. В табл. 6.7 даны средние и стандартные отклонения текущих распределений постоянных нагрузок, взятые из этих источников.

Гистограммы всегда имеют явно выраженный положительный коэффициент асимметрии. Поэтому в качестве распределения очень часто принимается гамма-распределение, однако возможно использование логнормального распределения и распределения экстремальных значений типа I. Коэффициент

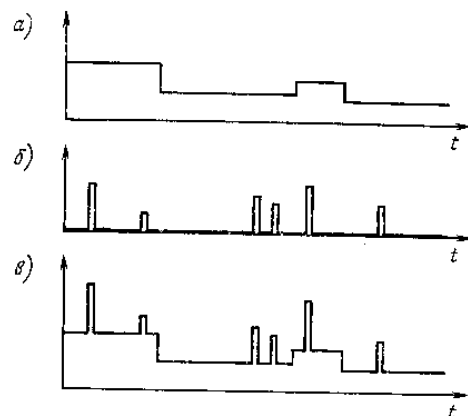


Рис. 6.2. Изменение во времени поэтажных нагрузок в многоэтажных зданиях  
а — долговременная нагрузка; б — кратковременная нагрузка; в — суммарная нагрузка

асимметрии снижается с увеличением площади сбора нагрузки  $A_b$ , и для очень больших площадей в соответствии с центральной предельной теоремой распределение стремится к нормальному.

Таблица 6.7. Пределы изменения параметров распределений поэтажных нагрузок

Помещения	Среднее $\mu$ , кН/м <sup>2</sup>	Стандартное отклонение $\sigma$ , кН/м <sup>2</sup>	Коэффициент обновления $\lambda$ , год <sup>-1</sup>
Квартиры:	гостиная	0,30—0,55	0,10—0,15
	спальня	0,25—0,4	
	кухня	0,1—0,4	
Бюро:	$A_b = 10 \text{ м}^2$	0,45—0,75	0,10—0,125
	$A_b = 30 \text{ м}^2$	0,40—0,65	
	$A_b = 100 \text{ м}^2$	0,35—0,60	
Отель, $A_b = 18 \text{ м}^2$	0,20—0,25	0,05—0,10	0,1—0,3
Магазины и универмаги, $A_b > 10 \text{ м}^2$	0,55—0,70	0,50—0,55	0,3—1,0
Здания легкой промышленности	0,3—1,90	0,20—0,9	—
Больницы	0,4—0,6	0,20—0,25	—
Библиотеки	0,8—1,3	0,50—0,80	—

В то время как для долговременных нагрузок имеется достаточный объем измерений, для чрезвычайных краткосрочных нагрузок во многом приходится полагаться на инженерные оценки. В табл. 6.8 приведены данные из работы [6.30], которые можно рассматривать как отправную точку.

### 3. СНЕГОВЫЕ НАГРУЗКИ

Снеговые нагрузки определяются сложным взаимодействием процессов накопления и таяния снега, которые зависят от интенсивности осадков, температуры воздуха, солнечной радиации, формы крыши и теплопередачи через крышу.

Простейшей моделью для представления об изменении снеговой нагрузки во времени является пуассонов импульсный процесс с треугольным импульсом (см. рис. 2.11, б). В местностях с морским климатом в течение зимы может быть несколько импульсов, в континентальных местностях и в горных районах, как правило, имеется только один период нагружения в году. Коэффициент обновления, год<sup>-1</sup>, по [6.22] составляет:  $\lambda=1$  для континентального климата;  $\lambda=2 \div 20$  для морского климата. Для Потсдама за период с 1951 по 1980 гг.  $\lambda=6,6$ , причем учитывались толщины снегового покрова 1 см и более.

Пиковое значение снеговой нагрузки на крыше, кН/м<sup>2</sup>, можно определить за период нагружения по формуле [6.22]

$$S = k C G H, \quad (6.3)$$

где  $k$  — безразмерный коэффициент, учитывающий форму крыши и ее уклон;  $C$  — переходный коэффициент, представляющий отношение снеговой нагрузки на крыше к снеговой нагрузке на поверхности земли;  $G$  — плотность снега, кН/м<sup>3</sup>;  $H$  — пиковое значение толщины снегового покрова за период нагружения, м.

Коэффициент  $k$ , как правило, рассматривается в качестве детерминированной величины. Он зависит от уклона крыши, ее формы и шероховатости покрытия.

Для простых форм крыши при угле наклона 15—30° принимается  $k=1$ , а при углах более 75°  $k=0$ . Между этими значениями  $k$  определяется по линейной интерполяции.

Коэффициент  $k$  учитывает кроме уменьшения снеговой нагрузки за счет сползания снега также и возможное увеличение нагрузки вследствие образования заносов за препятствиями или сползания снега с вышерасположенных покрытий. Графики коэффициентов для различных форм крыши можно найти в нормах.

Переходный коэффициент  $C$  представляет собой отношение максимальной снеговой нагрузки на крыше к максимальной снеговой нагрузке на поверхности земли, измеренной в непосредственной близости от здания в зимний период. При этом

Таблица 6.8. Параметры распределения кратковременных нагрузок

Помещение	Нагрузки за счет перестановки оборудования				Нагрузки от скопления людей на собраниях и т. п.				Нагрузки от скопления людей в чрезвычайных ситуациях			
	$m, \text{кН/м}^2$	$\sigma, \text{кН/м}^2$	$\lambda, \text{год}^{-1}$	$m_D, \text{неделя}$	$m, \text{кН/м}^2$	$\sigma, \text{кН/м}^2$	$\lambda, \text{год}^{-1}$	$m_D, \text{ч}$	$m, \text{кН/м}^2$	$\sigma, \text{кН/м}^2$	$\lambda, \text{год}^{-1}$	$m_D, \text{мин}$
Магазин и универсамы, $A_b = 93 \text{ м}^2$	0,42	0,20	0,2	2	0,33	0,16	4	6	0,83	0,41	0,1	15
Бюро, $A_b = 18,6 \text{ м}^2$	0,41	0,48	0,25	2	0,49	0,44	0,40	6	1,24	1,11	0,02	15
Отель, $A_b = 18,6 \text{ м}^2$	0,13	0,12	0,50	2	0,37	0,31	10	6	1,24	1,11	0,1	15
Квартира, $A_b = 18,6 \text{ м}^2$	0,23	0,21	0,10	2	0,99	0,89	2	4,6	—	—	—	—

Примечание.  $m_D$  — средняя продолжительность нагрузки; остальные обозначения те же, что и в табл. 6.7.

следует иметь в виду, что оба максимальных значения большей частью не совпадают по времени. Как правило, нагрузка на крыше достигает максимума раньше, чем на земле. По многочисленным измерениям в США О'Рурк и Редфилд [6.50] получили зависимость

$$C = 0,47 ET \epsilon_C, \quad (6.4)$$

где  $E$  — коэффициент, учитывающий влияние ветра и равный 1,32 для защищенных от ветра зданий, 1,00 для частично защищенных зданий и 0,95 для открытых для ветра зданий;  $T$  — коэффициент, учитывающий влияние температуры: 1,22 для неотапливаемых зданий или при хорошей теплоизоляции крыш и 1,00 — для отапливаемых зданий;  $\epsilon_C$  — ошибка, учитывающая случайные отклонения и имеющая логнормальное распределение с плотностью

$$f(\epsilon_C) = \frac{1}{0,42 \epsilon_C \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln \epsilon_C}{0,42} \right)^2 \right]. \quad (6.5)$$

Снеговая нагрузка на земле соответствует содержанию воды в снеге, т. е. весу растаявшего снега, вырезанного из снежного покрова цилиндра, отнесенному к единице площади. Она может быть замерена непосредственно или найдена как произведение толщины снежного покрова и плотности снега.

Плотность снега увеличивается во времени за счет уплотнения при нарастании толщины снега, сжимающего нижний слой. Удельный вес свежавывающего снега колеблется от 0,5 до 1 кН/м<sup>3</sup>. К концу зимы она увеличивается до 2—5 кН/м<sup>3</sup>, а в горных районах и более. Простейшая стохастическая модель, используемая в строительном деле, имеет вид:

$$\Gamma = [3 - 1,5 \exp(-1,5 m_H)] \epsilon_{\Gamma}, \quad (6.6)$$

где  $m_H$  — средняя толщина снежного покрова на земле, м;  $\epsilon_{\Gamma}$  — множитель, учитывающий ошибку оценки и представляющий логнормальную случайную величину со средним значением  $m_{\epsilon_{\Gamma}} = 1$  и коэффициентом вариации  $v_{\epsilon_{\Gamma}} = 0,2$ .

Толщина снежного покрова  $H$  устанавливается из наблюдений на метеостанциях. Для определенных климатических условий она зависит от высоты местности над уровнем моря. Для стран средней Европы по [6.22] среднее значение  $m_H$  ежегодной наибольшей толщины снега можно найти по эмпирической зависимости

$$m_H = AB^h, \quad (6.7)$$

где  $h$  — высота местности над уровнем моря, м;  $A$  и  $B$  — коэффициенты, зависящие от климатических условий: по данным [6.22], для приближенных районов  $A=0,25$ ,  $B=1,000875$ ; для внутренних районов  $A=0,25$ ,  $B=1,000202$ ; для горных местностей  $A=0,25$ ,  $B=1,001919$ .

Коэффициент вариации наибольшей годовой толщины снежного покрова убывает с возрастанием среднего и с увеличением высоты местности над уровнем моря.

Например, район Гарца качественно отличается заметно более высокой снеговой нагрузкой от прочих районов, будучи расположен на северо-западе и имея повышенные, достаточно большие высоты над уровнем моря.

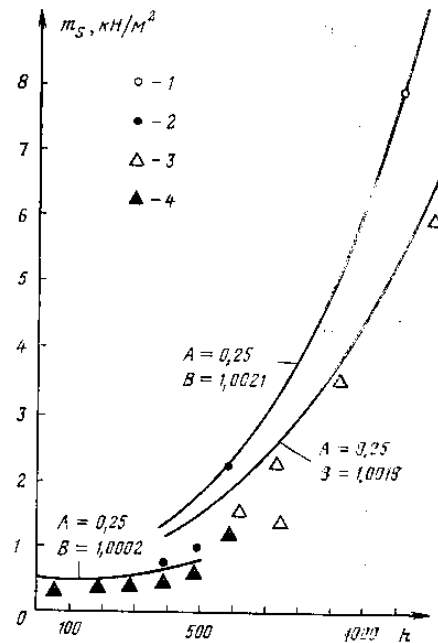


Рис. 6.3. Среднее значение годовых максимумов снеговой нагрузки (водный эквивалент) в функции от высоты над уровнем моря; сравнение измеренных величин с полученными по уравнениям (6.7) и (6.8)

1 — Гарц, отдельные метеостанции; 2 — Гарц, средние по многим метеостанциям; 3 — территория бывш. ГДР без Гарца, отдельные метеостанции; 4 — то же, средние по многим метеостанциям

На рис. 6.3 показано среднее значение наибольших годовых нагрузок  $m_s = m_H m_{\Gamma}$  по работе [6.48]. Если пользоваться выражениями (6.6) и (6.7) для  $m_H$  и  $m_{\Gamma}$ , то для удовлетворительного представления среднего годового максимума снеговой нагрузки рекомендуются значения коэффициентов, приведенные в табл. 6.9.

На рис. 6.4 приведены для разных метеостанций коэффициенты вариации [6.48], которые убывают от 1 до 0,4 с увеличением высоты над уровнем моря.

Более подходящим по сравнению с экстремальным для распределения годовых максимумов снеговой нагрузки



Таблица 6.9. Значения коэффициентов А и В

Район	h, м	А	В
Все районы Бывш. ГДР, кроме Гарца	h < 400	0,25	1,0002
Гарц	h > 400	0,25	1,0021

является логнормальное распределение [6.51]. Если в зависимости (6.3) С, Г и Н распределяются по логнормальному

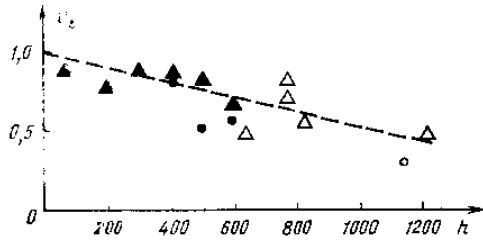


Рис. 6.4. Коэффициент вариации годовых максимумов снеговой нагрузки (водный эквивалент) в зависимости от высоты над уровнем моря (см. экспликацию к рис. 6.3)

закону, то такое же распределение имеет и снеговая нагрузка S на покрытии.

#### 4. ВЕТРОВЫЕ НАГРУЗКИ

Ветер — это турбулентное, меняющееся во времени и пространстве движение воздуха. Относительно просто это движение удается представить, разделяя скорость ветра v на медленно меняющуюся составляющую  $\bar{v}$  и турбулентную составляющую v'.

$$v(t) = \bar{v}(t) + v'(t). \quad (6.8)$$

Поскольку скорость ветра непрерывно меняется, v(t) зависит от интервала осреднения. Обычное время осреднения 1 ч 10 мин.

В табл. 6.10 приведены параметры распределения для годового максимума скорости ветра, замеренной на высоте 10 м для некоторых метеостанций бывш. ГДР [6.49]. Эти параметры хорошо подходят под распределение экстремальных значений типа I:

$$F(v) = \exp \{ -\exp [ -a(v-u) ] \},$$

где  $a = 1,28255 \sigma_v$ ;  $u = m_v - 0,45005 \sigma_v$ .

Таблица 6.10. Статистические параметры годовых максимумов скорости ветра, м/с

Местоположение	Годы наблюдения	Часовое осреднение		10-минутное осреднение		Пиковые значения осреднения по 2—10 с	
		m <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	m <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>	m <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub>
Варнемюнде	1948—1980	22,95	3,33	26,09	3,89	32,51	4,05
Шверин	1949—1980	17,81	3,00	21,55	3,64	32,88	5,31
Нойштрелиц	1949—1975	13,66	3,00	17,51	3,91	28,22	4,04
Потсдам	1948—1980	17,53	3,64	20,18	3,77	34,37	4,36
Веймар	1953—1980	18,85	2,83	21,37	2,72	32,53	5,28
Фихтельберг	1951—1980	25,28	2,69	28,22	3,67	44,52	7,99

Примечание. Станции расположены в следующих местностях: Варнемюнде — прибрежная область, полностью открытая; Шверин и Потсдам — внутренние области, открытые; Нойштрелиц — внутренняя область, частично защищенная от ветра; Веймар — предгорье, частично защищенное от ветра; Фихтельберг — гористая местность.

Скорость ветра зависит от высоты над поверхностью Земли. Эта зависимость для средней скорости  $\bar{v}(h)$  является степенной:

$$\bar{v}(h) = (h/10)^\alpha \bar{v}_{10}, \quad (6.9)$$

где  $\bar{v}_{10}$  — скорость на высоте 10 м;  $h$  — высота, м;  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от типа местности и определяемый по табл. 6.11.

Таблица 6.11. Значения параметров  $\alpha$  и  $k$  в зависимости от типа местности

Местность	$\alpha$	$k$
Открытая с малой высотой препятствий	0,16	0,005
Городские районы, районы с препятствиями высотой 10—15 м, лесные местности	0,28	0,015
Городские районы с высотной застройкой	0,40	0,050

Турбулентная, пульсационная составляющая  $v'(t)$ , которая колеблется вокруг  $\bar{v}(t)$  случайным образом, может быть представлена эргодическим гауссовым процессом (что под-

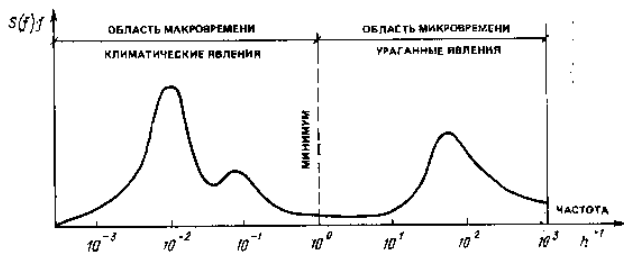


Рис. 6.5. Спектр плотностей горизонтальной скорости ветра в большом диапазоне частот (по Давенпорту)

тверждается многочисленными прямыми измерениями [6.52]) со спектральной плотностью (рис. 6.5)

$$S_{v'}(f) = 4 k \bar{v}^2 \frac{1}{f} \frac{x^2}{(1+x^2)^{4/3}}, \quad (6.10)$$

где  $S_{v'}(f)$  — спектральная плотность скорости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $f$  — частота,  $\text{с}^{-1}$ ;  $k$  — коэффициент сопротивления поверхности по табл. 6.11;  $\bar{v}$  — скорость ветра, измеренная на высоте 10 м с 10-минутным осреднением,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $x = 1200 f/\bar{v}$ .

Выражение (6.10) справедливо, как для равнинных, так и для горных районов.

Стандартное отклонение турбулентной составляющей скорости ветра

$$\sigma_{v'} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_{v'}(f) df}. \quad (6.11)$$

Среднее значение для  $v'(t)$  равно нулю.

Как и скорость ветра, ветровой напор складывается из напора от длительно действующей части  $q$ , статически нагружающей сооружение, и из турбулентной составляющей  $q'$ , возбуждающей колебания достаточно гибких сооружений:  $q = q + q'$ . Первое слагаемое определяется формулой

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 = \bar{v}^2/1600,$$

где  $\rho$  — плотность воздуха, равная  $1,226 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

Ветровая нагрузка на сооружение определяется ветровым напором, умноженным на площадь поверхности, подверженной действию напора, и на аэродинамический коэффициент  $c$ , определяемый для различных форм сооружений экспериментами в аэродинамических трубах [6.54]. Коэффициент  $c$  представляет собой безразмерный коэффициент пропорциональности, который зависит от геометрической формы поверхности, ее шероховатости, угла между нормалью к поверхности и направлением ветра и, в общем случае, от характеризующего ветровой поток числа Рейнольдса. Коэффициент  $c$  является случайной величиной с коэффициентом вариации  $v_c = 0,1$  [6.62].

Оценка воздействия пульсационной составляющей на сооружение представляет собой решение задачи теории стохастических колебаний. Инженерные приемы решения этой задачи изложены в работах [2.4, 6.55, 6.57, 6.60].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Использованные обозначения

**A** — характеристика поперечного сечения, например площадь, момент сопротивления и др.; случайное событие;  
**erfA** — требуемая величина характеристики поперечного сечения;  
 $\alpha_i$  — коэффициент чувствительности базисной переменной;  
 $\beta$  — индекс безопасности;  
 $c_i$  — коэффициент линейного уравнения предельного состояния;  
**Cov**  $[X_i, X_j]$  — ковариация  $X_i$  и  $X_j$   
**C<sub>X</sub>** — матрица ковариаций случайного вектора **X**;  
 $d$  — период действия нагрузки постоянной величины;  
 $D$  — период действия случайной нагрузки;  
 $\delta$  — наименьшее расстояние между началом координат и поверхностью предельного состояния в стандартизованном пространстве;  
 $E$  — случайный интервал времени между двумя последовательными нагружениями;  
**E**  $[X_i]$  — математическое ожидание случайной величины  $X_i$ ;  
**E**  $[X_i] = m_{X_i}$ ;  
 $f_X$  — плотность распределения базисной переменной  $X$ ;  
 $F_X$  — функция распределения базисной переменной  $X$ ;  
 $F_X^{-1}$  — обратная функция распределения базисной переменной  $X$ ;  
 $\Phi$  — функция распределения стандартизованной нормальной величины;  
 $\Phi^{-1}$  — обратная функция распределения стандартизованной нормальной величины;  
 $\phi$  — плотность распределения стандартизованной нормальной величины;  
 $g$  — уравнение предельного состояния в исходном пространстве;  
**G<sub>X<sub>i</sub></sub>** — дополнение к функции распределения базисной переменной;  
 $G$  — вектор производных уравнения предельного состояния в исходном пространстве;  
 $\gamma_{X_i}$  — коэффициент асимметрии случайной величины;  
 $\gamma$  — частный или общий коэффициент надежности;  
 $\Gamma$  — гамма-функция;  
 $h$  — уравнение предельного состояния в пространстве стандартизованных нормально распределенных базисных переменных;  
 $h_i$  — плотность отказов;  
 $H$  — вектор производных уравнения предельных состояний в стандартизованном пространстве;  
 $I$  — линеаризованное в проектной точке уравнение предельных состояний в стандартизованном пространстве;  
 $\lambda$  — коэффициент обновления, среднее число обновлений нагрузок в единицу времени;  
 $m$  — число случайных величин;  
 $m_{X_i}$  — среднее случайной величины  $X_i$ ;

$m_i$  —  $i$ -тый момент случайной величины;  
 $\mu_i$  —  $i$ -тый центральный момент случайной величины;  
 $n$  — число вариантов нагружения или число предельных состояний;  
 $N$  — случайное число вариантов нагружения;  
 $N_{(r)}^+$  — случайное число положительных пересечений уровня  $r$  случайным процессом;  
 $v_{(r)}^+$  — коэффициент выброса, среднее число положительных пересечений уровня  $r$  в единицу времени;  
 $p$  — вероятность наступления паузы в процессе нагружения;  
 $P_b$  — вероятность безотказной работы; вероятность превышения предельного состояния;  
 $P_f$  — вероятность отказа; вероятность превышения предельного состояния;  
 $q$  — вероятность активного состояния процесса нагружения;  
 $r$  — сопротивление постоянной величины;  
 $R$  — случайная величина сопротивления; матрица коэффициентов корреляции;  
 $\rho_{X_i, X_j}$  — коэффициент корреляции случайных величин  $X_i$  и  $X_j$ ;  
 $s$  — нагружение постоянной величины;  
 $S$  — случайная величина нагружения;  
 $\sigma_{X_i}$  — стандартное отклонение случайной величины  $X_i$ ;  
 $t$  — время;  
 $T$  — срок службы сооружения;  
 $T_L$  — продолжительность службы сооружения до первого отказа;  
 $T_R$  — период повторности;  
 $\tau$  — интервал времени;  
**Var**  $[X_i]$  — вариация (дисперсия) случайной величины  $X_i$ ; **Var**  $[X_i] = \sigma_{X_i}^2$ ;  
 $\sigma_{X_i}$  — коэффициент вариации случайной величины  $X_i$ ;  
 $x_i^{(n)}$  — нормативное значение величины  $X_i$ ;  
 $x_i^{(r)}$  — расчетное значение величины  $X_i$ ;  
 $X_i$  — базисная переменная; случайная величина;  
 $X_L^*$  — координата проектной точки в исходном пространстве;  
 $X_i(t)$  — базисная переменная; случайный процесс;  
 $X_i$  — случайное пиковое значение процесса  $X_i(t)$ ;  
 $y_i^*$  — координата проектной точки в стандартизованном пространстве;  
 $Y_i$  — стандартизованная нормально распределенная случайная величина;  
 $Z$  — запас прочности.

## Формулы для некоторых функций распределения

Таблица 1. Нормальное распределение

Характеристика	Общая форма	Стандартизованная форма $m=0; \sigma=1$
Плотность $f(x)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
Область определения	$\sigma > 0; m, x$ — действительные числа	$x$ — действительное число
Функция распределения	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-m}{\sigma}\right)^2\right] \times$ $\times du = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ (см. табл. II.3)
Величина квантиля, обратная функция распределения	$m + \sigma \Phi^{-1}(q)$	$\Phi^{-1}(q)$ (см. табл. II.4)
Математическое ожидание $m_x$	$m$	0
Стандартное отклонение $\sigma_x$	$\sigma$	1
Коэффициент вариации $v_x$	$\sigma/m$	$\infty$

Продолжение табл. 1

Характеристики	Общая форма	Стандартизованная форма $m=0; \sigma=1$
Коэффициент асимметрии $\gamma_x$	0	0
Экцесс $\varepsilon_x$	0	0
Медиана $F^{-1}(1/2)$	$m$	0
Мода $\hat{x}$	$m$	0
Моменты:		
$m_1$	$m$	0
$m_2$	$m^2 + \sigma^2$	1
$m_3$	$m^3 + 3\sigma^2 m$	0
$m_4$	$m^4 + 6\sigma^2 m^2 + 3\sigma^4$	3
$m_5$	$m^5 + 10\sigma^2 m^3 + 15m\sigma^4$	0
Центральные моменты		
$\mu_1$	0	0
$\mu_2$	$\sigma^2$	1
$\mu_3$	0	0
$\mu_4$	$3\sigma^4$	3
$\mu_5$	0	0

**Таблица 2. Функции для представления нормального распределения**

Определение:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du; \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du;$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du; \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2) du;$$

$\Phi_0$  и  $\operatorname{erf}(x)$  — нечетные функции

Формулы пересчета

	$\Phi(x)$	$\Phi_0(x)$	$\operatorname{erf}(x)$	$\operatorname{erfc}(x)$
$\Phi(x)$	—	$\Phi_0(x) + 0,5$	$\frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right)$	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$
$\Phi_0(x)$	$\Phi(x) - 0,5$	—	$\frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$	$\frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right)$
$\operatorname{erf}(x)$	$2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$	$\Phi_0(x\sqrt{2})$	—	$1 - \operatorname{erfc}(x)$
$\operatorname{erfc}(x)$	$2[1 - \Phi(x\sqrt{2})]$	$1 - 2\Phi_0(x\sqrt{2})$	$1 - \operatorname{erf}(x)$	—

Функция	Значения функций при $x$		
	$-\infty$	0	$\infty$
$\Phi(x)$	0	0,5	1
$\Phi_0(x)$	-0,5	0	0,5
$\operatorname{erf}(x)$	-1	0	1
$\operatorname{erfc}(x)$	2	1	0

**Таблица 3. Приближенные формулы для функции распределения  $\Phi(x)$  [2.9]**

Определение:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

При  $0 \leq x < \infty$

$$\Phi(x) = 1 - Z(x) (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5),$$

где  $Z(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)$ ,

$t = 1/(1+px)$  (здесь  $p = 0,2316419$ );  $b_1 = 0,319382530$ ;  $b_2 = -0,356563782$ ;  $b_3 = -1,821255978$ ;  $b_4 = 1,330274429$ .

При  $-\infty < x < 0$   $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ .

**Таблица 4. Приближенные формулы для обратной функции распределения  $\Phi^{-1}(x)$  [2.9]**

При  $0 < x \leq 0,5$

$$\Phi^{-1}(x) = -u + \frac{c_0 + c_1 u + c_2 u^2}{1 + d_1 u + d_2 u^2 + d_3 u^3},$$

где  $u = \sqrt{\ln(1/x^2)}$ ;  $c_0 = 2,515517$ ;  $c_1 = 0,802853$ ;  $c_2 = 0,010328$ ;  $d_1 = 1,432788$ ;  $d_2 = 0,189269$ ;  $d_3 = 0,001308$ .

При  $0,5 < x \leq 1$

$$\Phi^{-1}(x) = -\Phi^{-1}(1-x).$$

Таблица 5. Логнормальное распределение

Характеристики	Трехпараметрическое	Двухпараметрическое
Плотность $f(x)$	$\frac{1}{\sigma_u(x-x_0)} \varphi\left(\frac{\ln(x-x_0) m_u}{\sigma_u}\right)$	$\frac{1}{\sigma_u x} \varphi\left(\frac{\ln x - m_u}{\sigma_u}\right)$
Область определения	$x > x_0; \sigma_u > 0; m_u$ — действительные числа	$x > 0; \sigma_u > 0, m_u$ — действительные числа
Функция распределения $F(x)$	$\Phi\left[\frac{\ln(x-x_0) - m_u}{\sigma_u}\right]$	$\Phi\left(\frac{\ln x - m_u}{\sigma_u}\right)$
Величина квантиля, обратная функция распределения	$x_0 + \exp(m_u + \sigma_u \Phi^{-1}(q))$	$\exp(m_u + \sigma_u \Phi^{-1}(q))$
Математическое ожидание $m_x$	$x_0 + \exp\left(m_u + \frac{\sigma_u^2}{2}\right)$	$\exp\left(m_u + \frac{\sigma_u^2}{2}\right)$
Стандартное отклонение $\sigma_x$	$\exp\left(m_u + \frac{\sigma_u^2}{2}\right) \sqrt{\exp \sigma_u^2 - 1}$	$\exp\left(m_u + \frac{\sigma_u^2}{2}\right) \sqrt{\exp \sigma_u^2 - 1}$
Коэффициент вариации $v_x$	$\exp\left(m_u + \frac{\sigma_u^2}{2}\right) \frac{x_0 + \exp\left(m_u + \frac{\sigma_u^2}{2}\right) \sqrt{\exp \sigma_u^2 - 1}}{\sqrt{\exp \sigma_u^2 - 1}}$	$\sqrt{\exp \sigma_u^2 - 1}$
Коэффициент асимметрии $\gamma_x$	$(\exp \sigma_u^2 + 2) \sqrt{\exp \sigma_u^2 - 1}$	$(\exp \sigma_u^2 + 2) \sqrt{\exp \sigma_u^2 - 1}$

Продолжение табл. 5

Характеристики	Трехпараметрическое	Двухпараметрическое
Медиана $F^{-1}(1/2)$	$x_0 + \exp m_u$	$\exp m_u$
Мода $\hat{x}$	$x_0 + \exp(m_u + \sigma_u^2)$	$\exp(m_u + \sigma_u^2)$
Определение $m_u, \sigma_u$ по $m_x, \sigma_x, x_0$	$\sigma_u = \sqrt{\ln\left[1 + \frac{\sigma_x^2}{m_x - x_0}\right]}$ $m_u = \ln(m_x - x_0) - \frac{\sigma_u^2}{2} =$ $= \ln\left[\frac{m_x - x_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_x}{m_x - x_0}\right)^2}}\right]$	$v_x = \sigma_x / (m_x);$ $\sigma_u = \sqrt{\ln(1 + v_x^2)};$ $m_u = \ln m_x + \frac{\sigma_u^2}{2} = \ln\left(\frac{m_x}{\sqrt{1 + v_x^2}}\right)$
Определение $m_u, \sigma_u, x_0, m_0$ по $m_x, \sigma_x, \gamma_x$	<p>Выбирается нулевое приближение <math>\sigma_u</math>, итерации <math>\sigma_u</math>;</p> $\sigma_u^{(i+1)} = \left\{ \ln\left[\left(\frac{\gamma_x}{\exp \sigma_u^{(i)2} + 2}\right)^2 + 1\right] \right\}^{1/2};$ $m_u = \frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{\sigma_u^2}{\exp \sigma_u^2 - 1}\right) - \sigma_u^2 \right];$ $x_0 = m_x - \exp\left(m_u + \frac{\sigma_u^2}{2}\right)$	—

Т а б л и ц а 6. Распределение экстремальных значений типа I

Характеристики	Наибольшие значения	Наименьшие значения
Плотность $f(x)$	$a \exp \left\{ \frac{-a(x-u)}{-\exp[-a(x-u)]} \right\}$	$a \exp \{ a(x-u) \exp [a(x-u)] \}$
Область определения	$-\infty < x < \infty, a > 0$	$-\infty < x < \infty, a > 0$
Функция распределения $F(x)$	$\exp(-\exp[-a(x-u)])$	$1 - \exp(-\exp[a(x-u)])$
Величина квантиля, обратная функция распределения	$u - \frac{1}{a} [\ln(-\ln g)]$	$u + \frac{1}{a} \ln[-\ln(1-g)]$
Математическое ожидание $m_x$	$u + 0,577216/a$	$u - 0,577216/a$
Стандартное отклонение $\sigma_x$	$\frac{\pi}{a \sqrt{6}} = \frac{1,28255}{a}$	$1,28255/a$
Коэффициент вариации $v_x$	$\frac{1,28255}{au + 0,577216}$	$\frac{1,28255}{au - 0,577216}$
Коэффициент асимметрии $\gamma_x$	1,1395	-1,1395
Экцесс $\epsilon_x$	2,4000	2,4000
Медиана $F^{-1}(1/2)$	$u + 0,36651/a$	$u - 0,36651/a$
Мода $x$	$u$	$u$
Экстремальные значения из распределения экстремальных значений типа I ( $n$ — объем выборки)	Наибольшее значение из распределения наибольших значений: заменить $u$ на $u + \ln n/a$	Наименьшее значение из распределения наименьших значений: заменить $u$ на $u - \ln n/a$

Т а б л и ц а 7. Распределение экстремальных значений типа II  
Сокращение обозначения:  $\Gamma_1 = \Gamma(1-1/k)$ ;  $\Gamma_2 = \Gamma(1-2/k)$ ;  $\Gamma_3 = \Gamma(1-3/k)$ ;  $\Gamma(x)$  — гамма-функция (см. табл. II.10 и II.11).

Характеристики	Наибольшие значения	Наименьшие значения
Плотность $f(x)$	$\lambda k (x-x_0)^{-k-1} \times \exp[-\lambda(x-x_0)^{-k}]$	$\lambda k (x_0-x)^{-k-1} \times \exp[-\lambda(x_0-x)^{-k}]$
Область определения	$x_0 \leq x < \infty, k, \lambda > 0$	$-\infty < x \leq x_0, k, \lambda > 0$
Функция распределения $F(x)$	$\exp[-\lambda(x-x_0)^{-k}]$	$1 - \exp[-\lambda(x_0-x)^{-k}]$
Величина квантиля, обратная функция распределения	$x_0 + \left( -\frac{1}{\lambda} \ln q \right)^{-1/k}$	$x_0 - \left[ -\frac{1}{\lambda} \times \ln(1-q) \right]^{-1/k}$
Математическое ожидание $m_x$	$x_0 + \lambda^{1/k} \Gamma_1$	$x_0 - \lambda^{1/k} \Gamma_1$
Стандартное отклонение $\sigma_x$	$\lambda^{1/k} (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{1/2}$ при $k > 2$	$\lambda^{1/k} (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{1/2}$ при $k > 2$
Коэффициент вариации $v_x$	$(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{1/2} / (x_0 \lambda^{1/k} + \Gamma_1)$	$(\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{1/2} / (x_0 \lambda^{1/k} - \Gamma_1)$
Коэффициент асимметрии $\gamma_x$	$(\Gamma_3 - 3 \Gamma_1 \Gamma_2 + 2 \Gamma_1^3) / (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}$ при $k > 3$	$-(\Gamma_3 - 3 \Gamma_1 \Gamma_2 + 2 \Gamma_1^3) / (\Gamma_2 - \Gamma_1^2)^{3/2}$ при $k > 3$
Медиана $F^{-1}(1/2)$	$x_0 + (\lambda / \ln 2)^{1/k}$	$x_0 - \lambda / \ln 2)^{1/k}$
Мода $x$	$x_0 + \left( \lambda \frac{k}{k+1} \right)^{1/k}$	$x_0 - \left( \lambda \frac{k}{k+1} \right)^{1/k}$
Экстремальные значения из распределения экстремальных значений типа II ( $n$ — объем выборки)	Наибольшее значение из распределения наибольших значений: заменить $\lambda$ на $n \lambda$	Наименьшее значение из распределения наименьших значений: заменить $\lambda$ на $n \lambda$

Таблица 8. Распределение экстремальных значений типа III

Сокращенные обозначения:  $\Gamma_1 = \Gamma(1+1/k)$ ;  $\Gamma_2 = \Gamma(1+2/k)$ ;  $\Gamma_3 = \Gamma \times \times (1+3/k)$ ;  $\Gamma(x)$  — гамма-функция (см. табл. II.10 и II.11).

Характеристики	Наибольшие значения	Наименьшие значения
Плотность $f(x)$	$\lambda k (x_0 - x)^{k-1} \exp \times \times [-\lambda (x_0 - x)^k]$	$\lambda k (x - x_0)^{k-1} \times \times \exp [-\lambda (x - x_0)^k]$
Область определения	$-\infty < x \leq x_0$ ; $k, \lambda > 0$	$x_0 \leq x < \infty$ ; $k, \lambda > 0$
Функция распределения $F(x)$	$\exp [-\lambda (x_0 - x)^k]$	$1 - \exp [-\lambda (x - x_0)^k]$
Значение квантиля, обратная функция распределения	$x_0 - \left( -\frac{1}{\lambda} \ln g \right)^{1/k}$	$x_0 + \left[ -\frac{1}{\lambda} \ln (1 - q) \right]^{1/k}$
Математическое ожидание $m_x$	$x_0 - \lambda^{-1/k} \Gamma_1$	$x_0 + \lambda^{-1/k} \Gamma_1$
Стандартное отклонение $\sigma_x$	$\lambda^{-1/k} (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{1/2}$	$\lambda^{-1/k} (\Gamma_2 - \Gamma_2)^{1/2}$
Коэффициент вариации $v_x$	$(\Gamma_2 - \Gamma_1)^{1/2} (x_0 \lambda^{1/k} - \Gamma_1)$	$(\Gamma_2 - \Gamma_2)^{1/2} (x_0 \lambda^{1/k} + \Gamma_1)$
Коэффициент асимметрии $\gamma_x$	$(-\Gamma_3 + 3 \Gamma_1 \Gamma_2 - 2 \Gamma_1^2) / (\Gamma_2 - \Gamma_1)^{3/2}$	$(\Gamma_3 - 3 \Gamma_1 \Gamma_2 + 2 \Gamma_1^2) / (\Gamma_2 - \Gamma_2)^{3/2}$
Медиана $\Gamma^{-1}(1/2)$	$x_0 - (\ln 2 / \lambda)^{1/k}$	$x_0 + (\ln 2 / \lambda)^{1/k}$
Мода $\hat{x}$	$x_0 - \left( \frac{k-1}{\lambda k} \right)^{1/k}$	$x_0 + \left( \frac{k-1}{\lambda k} \right)^{1/k}$
Экстремальные значения из распределения экстремальных значений типа III ( $n$ — объем выборки)	Наибольшее значение из распределения наибольших значений; заменить $\lambda$ на $n\lambda$	Наименьшее значение из распределения наименьших значений; заменить $\lambda$ на $n\lambda$

Таблица 9. Гамма-распределение

Характеристика	Трехпараметрическое	Двухпараметрическое
Плотность $f(x)$	$\frac{b^p}{\Gamma(p)} \exp [-b(x-x_0)] (x-x_0)^{p-1}$	$\frac{b^p}{\Gamma(p)} \exp (-bx) x^{p-1}$
Область определения	$x > x_0$ ; $b > 0$ ; $p > 0$	$b > 0$ ; $p > 0$
Функция распределения $F(x)$	$\frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_{x_0}^x \exp [-b(a-x_0)] (a-x_0)^{p-1} da$	$\frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_0^x \exp (-bu)^{p-1} u du$
Математическое ожидание $m_x$	$x_0 + p/b$	$p/b$
Стандартное отклонение $\sigma_x$	$\sqrt{p/b}$	$\sqrt{p/b}$
Коэффициент вариации $v_x$	$\sqrt{p/(x_0 b + p)}$	$1/\sqrt{p}$
Коэффициент асимметрии $\delta_x$	$2/\sqrt{p}$	$2/\sqrt{p}$
Экспесс $e_x$	$6/p$	$6/p$
Мода $\hat{x}$	$x_0 + (p-1)/b$	$(p-1)/b$



Характеристика	Трёхпараметрическое	Двухпараметрическое
Определение $b$ и $p$ по $m_X, \sigma_X, x_0$	$b = \frac{m_X - x_0}{\sigma_X^2};$ $p = \frac{(m_X - x_0)}{\sigma_X^2};$	$b = \frac{m_X}{\sigma_X^2};$ $p = \frac{m_X^2}{\sigma_X^2} = \frac{1}{v_X^2}$
Определение $b$ и $p$ по $m_X, \sigma_X, \gamma_X$ $0 < \gamma_X < 2$	$b = \frac{2}{\sigma_X \gamma_X};$ $p = 4(\gamma_X)^2;$ $x_0 = m_X - 2 \sigma_X \gamma_X$	—

Экспоненциальное распределение:  $p = 1$ ;  $X^2$ -распределение с  $n$ -степенями свободы:  $p = n/2, b = 1/2$ .

Таблица 10. Приближенные выражения Г-функции

Определение:  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

При  $x$  целым положительном числе:  $\Gamma(x) = (x-1)!$

- >  $x > 2$ : если выбрать  $y = x - r$  так, чтобы  $1 < y < 2$ , а  $r$  было целым положительным числом, то  $\Gamma(x) = \Gamma(y) (x-1) (x-2) \dots (x-r)$
- >  $1 < x < 2$ :  $y = x$ ;  $\Gamma(x) = \Gamma(y)$
- >  $x < 1$  если выбрать  $y = x + r$  так, чтобы  $1 < y < 2$ , а  $r$  было целым положительным числом, то

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(y)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+r-1)}$$

где  $\Gamma(y) \approx 1 - 0,57710166(y-1) + 0,98584399(y-1)^2 - 0,87642182(y-1)^3 + 0,83282120(y-1)^4 - 0,56842790(y-1)^5 + 0,25482049(y-1)^6 - 0,05149930(y-1)^7$ .

Таблица 11. Приближенные формулы для  $\ln \Gamma(x)$

При  $10^9 < x < 10^{10}$ ,  $\ln \Gamma(x) \approx x(\ln x - 1) \gg 18 < x \leq 10^{10}$ ,  $y = x \ln \Gamma(x) - \ln \Gamma(y) \gg 0 < x \leq 18$ . Если выбрать  $y = x + r$  так, чтобы  $18 < y \leq 19$ , а  $r$  было целым положительным числом, то  $\ln \Gamma(x) = \ln \Gamma(y) - \ln [x(x+1)(x+2)\dots(x+r-1)]$ , где  $\ln \Gamma(y) \approx (y + \frac{1}{2}) \ln y - y + \ln \sqrt{2\pi} + (\frac{1}{12} - \frac{u}{360} + \frac{26455 u^2}{333333} - 0,0005952380952 u^3)/y$ ;  $u = 1/y^2$ .

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Программа на Бейсике

всего 254 наименования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

```

10: REM ** MONTE CARLO METHODE      BEISPIEL 14 **
20: REM ** EINGABE **
30: INPUT ' SPANNWEITE= ' ; L
40: INPUT ' WIDERSTANDSMOMENT= ' ; W
50: INPUT ' MITTELWERT VON X1= ' ; M1
60: INPUT ' STANDARDABWEICHUNG VON X1= ' ; S1
70: INPUT ' MINIMALWERT VON X1= ' ; X0
80: SU=SQR (LN (1+(S1/(M1-X0) ( Λ 2)))
90: MU=LN (M1-X0)-SU * SU/2
100: INPUT ' MITTELWERT VON X2= ' ; M2
110: INPUT ' STANDARDABWEICHUNG VON X2= ' ; S2
120: A=1.28255/S2
130: U=M2-0.57722/A
140: INPUT ' EXPONENT K= ' ; K
150: INPUT ' ANZAHL DER MONTE-CARLO-ZYKLEN= ' ; MC
160: INPUT ' ANFANGSWERT ZUFALLSZAHL= ' ; UN
170: REM ** BEGINN DER MONTE-CARLO-RECHNUNG **
180: Q=0
190: FOR J=1 TO MC
200: REM ** ERZEUGUNG ZUFALLSZAHL NACH GL. (3.150) **
210: GOSUB ' ZUF.ZAHL ' : Z1=UN/(1E8+1)
220: GOSUB ' ZUF.ZAHL ' : Z2=UN/(1E8+1)
230: REM ** BERECHNUNG DER V1 **
240: V1=Z1 Λ K
250: V2=1-(1-Z2) Λ K
260: IF V2=1 GOTO 350
270: REM ** BERECHNUNG DER X1 **
280: P=V1 : GOSUB ' INNVN '
290: X1=X0+EXP (MU+SU * X)
300: X2=U-LN (-LN (V2))/A
310: REM ** BERECHNUNG GRENZZUSTANDSFUNKTION **
320: G=W * X1 -L * X2
330: REM ** GEWICHTSFUNKTION WG **
340: IF G >= 0 GOTO 370
350: WG=K * K * (Z1 * (1-Z2)) Λ (K-1)
360: Q=Q+WG
370: NEXT J
380: PF=Q/MC
390: PRINT ' NAEHERUNGSW. DER VERSAGENSWAHRSCH.=
    ' ; PF
400: END
500: ' ZUF.ZAHL ' : UN=23 * UN-INT (23 * UN/(1E8+1)) * (1E8+1)
510: RETURN
600: ' INNVN ' : IF P > 0.5 THEN P=1-P : GOSUB 620 : RETURN
610: GOSUB 620 : X=-X : RETURN
620: T=SQR (LN( 1/P/P))
630: X=2.515517+0.802853 * T+0.010328 * T * T
640: X=X/(1.432788 * T+0.189269 * T * T+0.001308 * T * T * T)
650: X=T-X : RETURN

```

[1.1] *Matousek, M.; Schneider, J.*: Untersuchungen zur Struktur des Sicherheitsproblems von Bauwerken. ETH Zürich: Institut für Baustatik und Konstruktion, Februar 1976.

[1.2] *Blaut, H.*: Gedanken zum Sicherheitskonzept im Bauwesen. Beton- und Stahlbetonbau (1982) 9, S. 235-239.

[1.3] *Schneider, T.*: Sicherheit als sozio-ökonomisches Optimierungsproblem. IVBH, 11. Kongreß: Einführungsbericht, S. 225-236.

[1.4] *Boe, C.*: Risk-Management - The Realization of Safety. IVBH, 11. Kongreß: Einführungsbericht, S. 237-246.

[1.5] *Kuhlmann, H.*: Einführung in die Sicherheitswissenschaft. Wiesbaden: Vieweg & Sohn 1981.

[1.6] *Hacker, W.*: Arbeits- und Ingenieurpsychologie. Bericht: VEB Verlag der Wissenschaften 1973.

[1.7] *Werner, G. H.*: Systematische Schadensverhütung und -bekämpfung (SSVB). Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie.

[1.8] *Seismic Design of Concrete Structures. Preliminary Draft of an Appendix to the CEB-FIP-Model Code April 1980.* CEB-Bulletin d'Information Nr. 133.

[1.9] *Stüller, M.*: Einheitliche europäische Bauvorschriften - Wunsch und Wirklichkeit. Beton- und Stahlbetonbau (1973) 10, S. 242-246.

[1.10] *Mayer, M.*: Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften. Berlin: J. Springer 1926.

[1.11] *Sexsmith, R. G.; Lind, N. C.*: Policies for Selection of Target Safety Levels. Zweite Internationale Konferenz über Tragwerksicherheit und Zuverlässigkeit, TU München (1977) - Berichtsband. Düsseldorf: Werner Verlag.

[1.12] *First Order Reliability Concepts for Design Codes.* Joint Committee on Structural Safety, CEB-Bulletin Nr. 112 (1976).

[1.13] *Rosenblueth, E.; Mendoza, E.*: Reliability Optimization in Isostatic Structures. ASCE, Jour. of the Engineering Mechanics Division (1971) S. 1625-1642.

[2.1] *Smirnov, N. W.; Dunin-Barkowski, I. W.*: Mathematische Statistik in der Technik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1969.

[2.2] *Storm, R.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1976.

[2.3] *Fisz, M.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970.

[2.4] *Heinrich, W.; Hennig, K.*: Zufallsschwingungen mechanischer Systeme. Berlin: Akademie-Verlag 1977.

[2.5] *Köchel.*: Zuverlässigkeit technischer Systeme. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1982.

[2.6] *Sweschnikow, A. A.*: Untersuchungsmethoden der Theorie der Zufallsfunktionen mit praktischen Anwendungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1965.

[2.7] *Gumbel, E. J.*: Statistics of Extremes. New York: Columbia Univ. Press 1958.

[2.8] *Bronstein, I. N.; Semendjajew.*: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsges. 1979.

[2.9] *Abramowitz, Stegun.*: Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards 1964.

- [2.10] Veržek, M.: Distribution of Extreme Values in Structural Theory. Acta Technica CSAV (1969) 6, S. 775—813.
- [2.11] Die meteorologischen Grundlagen der potentiellen Schneelastgefährdung im Gebiet der DDR. Hauptamt für Klimatologie: Forschungsbericht 1972 (nicht veröffentlicht).
- [2.12] Bolotin, V. V.: Wahrscheinlichkeitsmethoden zur Berechnung von Konstruktionen. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1979.
- [2.13] Madsen, H. O.: Load Models and Load Combinations. Dänemark: Technische Universität, Dissertation, Februar 1979.
- [2.14] Lurube, R. D.; Cornell, A.: Combination of Various Load Processes. ASCE: Journal of the Structural Division ST 1, Januar 1981, S. 223—239.
- [2.15] Breitung, K.; Rackwitz, R.: Überschreitungsrate für Lastprozesse mit rechteckförmigen Impulsen. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1979) 42.
- [2.16] Breitung, K.: Niveauüberschreitungen von Summen von Zufallsprozessen, deren Pfade Sprungfunktionen sind. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1978) 32.
- [2.17] Wen, Y. K.; Pearce, H. T.: Combined Dynamic Effects of Correlated Load Processes. Nuclear Engineering and Design (1982) S. 179—189.
- [3.1] Schüeller, G. I.: Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken. Berlin, München: Verlag W. Ernst & Sohn 1981.
- [3.2] Murzewski, J.: Sicherheit der Baukonstruktionen. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen 1974.
- [3.3] Thoft Christensen, P.; Baker, M. J.: Structural Reliability Theory and its Applications. Springer Verlag 1982.
- [3.4] Benjamin, J. R.; Cornell, C. Allin: Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers. New York: McGraw-Hill Book Company 1970.
- [3.5] Ghosel, D.; Lungu, D.: Wind, Snow and Temperature Effects on Structures Based on Probability. Turnbridge Wells: Abacus Press 1975.
- [3.6] Ditlevsen, O.: Fundamental Postulate in Structural Safety. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, No 4 (August 1983), S. 1096—1102.
- [3.7] Rüsck, H.: Einführung in die Begriffe, Methoden und Aufgaben der Sicherheitstheorie. Weserbergland: Vortrag auf der Arbeitstagung «Sicherheit von Betonbauten» des Deutschen Beton-Vereins. (7.—8.5. 1973).
- [3.8] Müller, H.; Neumann, P.; Storm, R.: Tafeln der mathematischen Statistik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1973.
- [3.9] Freudenthal, A. M.: Kritische Betrachtungen der Sicherheitskriterien und ihrer grundsätzlichen Auffassungen. IVBH: 8. Kongreß, Vorbericht S. 35—44.
- [3.10] Freudenthal, A. M.; Garretts, J. M.; Shinozuka, M.: The analysis of structural safety. J. Structural Div., ASCE, 92 No. ST4, Proc. Paper 4682 (1966) S. 267.
- [3.11] Basler, E.: Untersuchungen über den Sicherheitsbegriff. Zürich: ETH. Dissertation, Prom. Nr. 3035, 1960.
- [3.12] Bant, H.: Über den Zusammenhang zwischen Qualität und Sicherheit im Betonbau. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Nr. 149. Berlin: Verlag W. Ernst & Sohn.
- [3.13] Hannus, M.: Numerical Analysis of Structural Reliability. Finland: Technical Research Centre of Finland, Building Technology and Community Development, Publication 5.
- [3.14] Shinozuka, M.: Basic Analysis of Structural Safety. J. of Structural Engineering Vol. 10, Nr. 3 (März 1983), S. 721—740.
- [3.15] Cornell, C. A.: A probability-based structural code. ACI J. 66 (1969) 12, S. 974—985.
- [3.16] Cornell, C. A.: A First-Order Reliability Theory for Structural Design. Canada: University of Waterloo, Solid Mechanics Division, Study No 3, Ontario.
- [3.17] Tichý, M.; Veržek, M.: Statistical Theory of Concrete Structures. Prague: 1972.
- [3.18] Spaethe, G.: Wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse der Tragwerkssicherheit — Methoden und Anwendungen. Berlin: Bauinformation — Reihe Technik und Organisation, 69 (1974).
- [3.19] Harzer, A. M.; Lind, N. C.: Exact and Invariant Second Moment Code Format. J. of the Engin. Mech. Div. (1974 Febr.) S. 111—121.
- [3.20] Rackwitz, R.: Practical Probabilistic Approach to Design. Comité Européen du Béton Bulletin d'Information Nr. 112, S. 13—71.
- [3.21] Ditlevsen, O.: Generalized Second Moment Reliability Index. J. Struct. Mech. 7 (1979) 4, S. 435—451.
- [3.22] Ditlevsen, O.: Extended Second Moment Algebra as an Efficient Tool in Structural Reliability. Nuclear Engineering and Design 71 (1982), S. 317—323.
- [3.23] Lind, N. C.: Formulation of Probabilistic Design. Journ. of the Engin. Mech. Div. (April 1977), S. 273—285.
- [3.24] Lind, N. C.: Optimal Reliability Analysis by Fast Convolution. Journ. of the Engin. Mech. Div., Vol. 105 (Juni 1979), S. 447—452.
- [3.25] Fiebler, B.; Hawranek, R.; Rackwitz, R.: Numerische Methoden für probabilistische Bemessungsverfahren und Sicherheitsnachweise. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie (1976) 14.
- [3.26] König, G.; Heunisch, M.: Zur statistischen Sicherheitstheorie im Stahlbetonbau. Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt (1972) 16. Berlin: Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.
- [3.27] Doiński, K.: First Order Second Moment Approximation in Reliability of Structural Systems: Critical Review and some Reliability Bounds. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie, H. 63.
- [3.28] Rackwitz, R.; Fiebler, B.: Structural Reliability under Combined Random Load Sequences. Computer & Structures, Vol. 9 (1978), S. 489—494.
- [3.29] Rackwitz, R.; Fiebler, B.: Zwei Anwendungen der Zuverlässigkeitstheorie erster Ordnung bei zeitlich veränderlichen Lasten. TU München: Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke (1977) 17.
- [3.30] Kreko, B.: Optimierung — Nichtlineare Modelle. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1974.
- [3.31] Eeresin, I. S.; Shidkow, N. P.: Numerische Methoden. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1970.
- [3.32] Fletcher, R.; Powell, M.: A rapidly convergent descent method for minimization. Computer J. 6 (1963) 2, S. 163—168.
- [3.33] Fletcher, R.; Reeves, C. M.: Function minimization by conjugate gradients. Computer J. 7 (1964) 2, S. 149—154.
- [3.34] Programmpaket: Numerische Mathematik. VEB Robotron: Systemunterlagen, Unterprogramme FMFP, DFMP, FMCG, DFMCG.
- [3.35] Dunkert, J.: Numerische Methoden der Mechanik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1977.

- [3.36] Neumann, H. J.; Fießler, B.; Rackwitz, R.: Die genäherte Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit mit Hilfe rotationssymmetrischer Grenzzustandsflächen 2. Ordnung. TU München: Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke (1977) 22.
- [3.37] Fießler, B.; Neumann, H. J.; Rackwitz, R.: Quadratic Limit States in Structural Reliability. Journal of the Engineering Mechanics Div. (August 1979). S. 661—676.
- [3.38] Hohenbichler, M.: Approximate Evaluation of the Multinormal Distribution Function. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1981) 58. S. 56—66.
- [3.39] Hohenbichler, M.; Rackwitz, R.: Non-Normal Dependent Vectors in Structural Safety. Journal of the Engineering Mechanics Div. Vol. 107. Nr. 6 (Dez. 1981). S. 1227—1238.
- [3.40] Ditlevsen, O.: Principle of Normal Tail Approximation. Journal of the Engineering Mechanics Div. Vol. 107 (Dez. 1981). S. 1191—1208.
- [3.41] Zielinski, R.: Erzeugung von Zufallszahlen. Leipzig: VEB Fachhochverlag, 1978.
- [3.42] Ermakow, S. M.: Die Monte-Carlo-Methode und verwandte Fragen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975.
- [3.43] Friedrich, H.; Lange, C.: Numerische Simulation von Zufallsgrößen. Akademie der Wissenschaften der DDR, Institut für Mechanik, Report R — Mech — 01/85, 56 S.
- [3.44] Busienko, N. P.; Schreider, J. A.: Die Monte-Carlo-Methode und ihre Verwirklichung mit elektronischen Digitalrechnern. Leipzig: Verlag Teubner, 1964.
- [3.45] Warner, R. F.; Kabaila, A. P.: Monte-Carlo Study of Structural Safety. Journal of the Structural Div. ASCE, No. 94, St. 12 (1968).
- [3.46] Freudenthal, A. M.: Safety, Reliability and Structural Design. Journal of the Structural Div. (1961). S. 1—16.
- [3.47] Ang, A. H.-S.: Structural Risk Analysis and Reliability Based Design. Journal of the Structural Div. (1973). S. 1891—1910.
- [3.48] Ang, A.; Amin, M.: Reliability of Structures and Structural Systems. Journal of the Engineering Mechanics Div. (1968). S. 671—691.
- [3.49] Krzykucz, B.; Kersken-Bradley, M.: Wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse der Lebensdauerverteilung nach Freudenthal et al. TU München: Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke (1976) 12.
- [3.50] Bickley, D.: Probability Distribution of Maximum Sustained Load. Journal of the Structural Div. (1974 Nov). S. 2361—2365.
- [3.51] Rackwitz, R.: Approximate Combination of Correlated Load Sequences. TU München: Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke (1977) 21. S. 36—48.
- [3.52] Clark, C. E.: The Greatest of a Finite Set of Random Variables. Operations Research (1961). S. 145—162.
- [3.53] Grigoriu, M.; Turkstra, C.: Structural Safety Indices for repeated Loads. Journal of Engineering Mechanics Division (1978). S. 829—844.
- [3.54] Ferry Borges, J.; Castanheta, M.: Course «Structural Safety». CEB Bulletin Nr. 78, 1971.
- [3.55] Petersen, C.; Hawranek, H.: Zur Sicherheitstheorie im konstruktiven Stahlbau. TU München: Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke (1974) 5.
- [3.56] Fießler, B.: Entwicklung von Regeln zur Kombination stochastischer Lasten für die Tragwerksbemessung. TU München: Dissertation, 1983.
- [3.57] Larrabee, R. D.; Cornell, C. A.: Upcrossing Rate Solution for Load Combinations. Journal of the Structural Div. (1979). S. 125—132.
- [3.58] Der Kiureghian, A.: Probabilistic Load Combination. Tucson: Proceedings of the Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability (1979). S. 59—64.
- [3.59] Wen, Y. K.: Statistical Combination of Extreme Loads. Journal of the Structural Div. (1977). S. 1079—1093.
- [3.60] Wen, Y. K.: Statistics of Extreme of Live Load on Buildings. Journal of the Structural Div. (1979). S. 1893—1900.
- [3.61] Schwarz, R. F.: Beitrag zur Bestimmung der Zuverlässigkeit nichtlinearer Strukturen unter Berücksichtigung kombinierter stochastischer Einwirkungen. TU München: Dissertation, 1979.
- [3.62] Wen, Y. K.: Clustering Model for Correlated Load Processes. Journal of the Structural Div. (1981). S. 965—983.
- [3.63] Turkstra, C. J.: Theory of Structural Design Decisions. Study No 2. Solid Mechanics Div., University of Waterloo, Canada: Waterloo, Ontario, 1970.
- [3.64] Schott, G.: Ermüdungsfestigkeit — Lebensdauerberechnung für Kollektiv- und Zufallsbeanspruchung. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1983.
- [3.65] Reppermund, K.: Konzepte zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit bei Ermüdungsbeanspruchung. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1981). H. 64.
- [3.66] Fatigue Reliability: Variable Amplitude Loading. Journal of the Structural Div. ASCE, Vol. 108 (Januar 1982). S. 47—69.
- [3.67] Ang, A. H.-S.: Bases for Reliability Approach to Structural Fatigue. Zweite internationale Konferenz über Tragwerksicherheit und Zuverlässigkeit. München: Werner Verlag 1977. S. 97—114.
- [3.68] Cörten, H. T.; Dolan, T.: Cumulative Fatigue Damage, Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals. London/New York, 1956. S. 235—246.
- [3.69] Haibach, E.: Modifizierte lineare Schadensakkumulationshypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung. Darmstadt: Technische Mitteilungen des Laboratoriums für Betriebsfestigkeit. TM 50/70.
- [3.70] Miner, M. A.: Cumulative Damage in Fatigue. Journal Appl. Mechanics 12(1945) 3. S. 159—164.
- [3.71] Quel, R.; Geidner, Th.: Zur Berechnung der Zuverlässigkeit von Konstruktionselementen bei Ermüdungsbeanspruchung. Der Stahlbau: (1980) 1. S. 17—23.
- [3.72] Rackwitz, R.: Application of First Order Reliability Methods to Structural Fatigue. TU München: Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke (1977) 17. S. 17—24.
- [3.73] Hummitzsch, P.: Zuverlässigkeit von Systemen. Berlin: VEB Verlag Technik, 1965.
- [3.74] Gnedenko, B. W.; Beljajew, J. K.; Solowjew, A. D.: Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie. Berlin: Akademie-Verlag, 1968.
- [3.75] Reinschke, K.: Zuverlässigkeit von Systemen. Berlin: VEB Verlag Technik, 1971.
- [3.76] Barlow, R. E.; Proschan, F.: Statistische Theorie der Zuverlässigkeit. Berlin: Akademie-Verlag, 1978.
- [3.77] Störmer, H.: Mathematische Theorie der Zuverlässigkeit. Berlin: Akademie-Verlag, 1983.
- [3.78] Rackwitz, R.; Hohenbichler, M.: Studien zur Zuverlässigkeit redundanter Tragsysteme. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1981) 58.

- [3.79] *Rockwitz, R.; Painter, B.*: Reliability of General Structural Systems under Combined Loading. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1981) 58. S. 83—132.
- [3.80] *Hohenbichler, M.; Rockwitz, R.*: Reliability of Parallel Systems under Imposed Uniform Strain. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, No 3 (1983). S. 896—907.
- [3.81] *Cornell, C. A.*: Bounds on the Reliability of Structural Systems. Journal of the Structural Div. (1967). S. 171—201.
- [3.82] *Ang, A. H.-S.; Amin, M.*: Reliability of Structures and Structural Systems. Journal of the Engineering Mechanics Div. ASCE (April 1968). S. 671—691.
- [3.83] *Dillensen, O.*: Narrow Reliability Bounds for Structural Systems. Journal Structural Mechanics. (1979) 4. S. 453—472.
- [3.84] *Hohenbichler, H.*: Zur zuverlässigkeitstheoretischen Untersuchung von Seriensystemen. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1980) 48.
- [3.85] *Grimmett, M. J.; Schueller, G. I.*: Benchmark Study on Methods to Determine Collapse Failure Probabilities of Redundant Structures. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie (1981) 51.
- [3.86] *Dillensen, O.*: System Reliability Bounding by Conditioning. Journal of the Engineering Mechanics Div. ASCE, Vol. 108 (Okt 1982) S. 708—718.
- [3.87] *Dillensen, O.; Bjerager, P.*: Reliability of Highly Redundant Plastic Structures. Journal of Engineering Mechanics (1984) No 5. S. 671—693.
- [3.88] *Rockwitz, R.*: Close Bounds for the Reliability of Structural Systems. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1978) 29.
- [3.89] *Johnson, N. L.; Kotz, S.*: Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. London: John Wiley & Sons Inc.
- [3.90] *Curnow, R. N.; Dunnell, C. W.*: The Numerical Evaluation of Certain Multivariate Normal Integrals. The Annals of Mathematical Statistics Vol. 33, (1962) No 2. S. 571—579.
- [3.91] *Owen, D. B.*: Tables for Computing Bivariate Normal Probabilities. The Annals of Mathematical Statistics Vol. 27, (1956) No 4. S. 1075—1090.
- [3.92] Basic Notes on Resistance. Joint Committee on Structural Safety. 2nd Draft (April 1984).
- [3.93] Statistisches Jahrbuch der Deutschen Demokratischen Republik Berlin: Staatsverlag der DDR 1982, 1983.
- [3.94] *O'Neil, R.*: Reactor Pressure Vessels Safety and Reliability — Certainty and Uncertainty. München: Second International Conference on Structural Safety and Reliability, Berichtsband (1977). S. 377—400.
- [3.95] *Thomas, J. M.*: Decision Methods in Risk Analysis. Nuclear Engineering and Design 71 (1982). S. 413—421.
- [3.96] *Farmer, F. R.*: Decisions in Reliability Analysis. Nuclear Engineering and Design 71 (1982). S. 399—403.
- [4.1] RGW-Standard ST RGW 1407-78, Baukonstruktionen und Gründungen, Lasten und Einwirkungen. Allgemeine Grundsätze. Dezember, 1978.
- [4.2] International Standard ISO 2394. General principles of verification of the safety of structures. First edition — 1973.02.15.
- [4.3] ISO TC 98 — Working group. IS 2394. General Principles on Reliability for Structures. Sixth draft, 1981.
- [4.4] Na Bau: Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen. Berlin, Köln: Beuth Verlag GmbH, 1. Auflage 1981.
- [4.5] Comité Euro-International du Béton: Internationales System einheitlicher technischer Baubestimmungen, Band 1. Einheitliche Regeln für verschiedene Bauarten und Baustoffe. Bulletin d'Information No 116, November, 1976.
- [4.6] Joint Committee on Structural Safety: General Principles on Quality Assurance for Structures — General Principles on Reliability for Structural Design. IVBII — Berichte der Arbeitskommissionen, Band 35.
- [4.7] Nordic Committee for Building Regulations (N.K.B.) Proposal for Safety Codes and Loading Regulations for Load-Carrying Structures. CEB — Bull d'Information No 108.
- [4.8] TGL 38 792 (ST RGW 384—76). Baukonstruktionen und Gründungen, Grundsätze für die Berechnung. Mai 1981.
- [4.9] Regeln über die Berücksichtigung des Wertigkeitsgrades von Gebäuden und Anlagen bei der Projektierung von Konstruktionen. Festlegung des Gostroi der UdSSR vom 19. März 1981. Nr. 41.
- [4.10] CSN 730031. Stavebni konstrukce a základy. Prag: Änderung 4/83.
- [4.11] Staatliche Bauaufsicht der DDR, Vorschrift 131/82: Stahlbau; Stahltragwerke für Kranbahnen; Berechnung nach zulässigen Spannungen. STBA (1983) 4. S. 25—32.
- [4.12] *Keldysch, W. M.*: Berechnung von Baukonstruktionen nach den Grenzbeanspruchungen. Berlin: VEB Verlag Technik, 1953.
- [4.13] *Streleckij, Beyer, Driving; u. a.*: Berechnung von Baukonstruktionen nach Grenzzuständen, Untersuchungen zur Berechnungsmethodik. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1977.
- [4.14] *Ostavnou, V. A.; Smirnov, A. F.; Rajzer, B. D.*: Učēt otvetstvennosti zdánij sooruzenij v normach proektirovanija stroitel'nych konstrukcij. Moskva: Stroitel'naja mehanika i rasčet sooruzenij (1981) 1. S. 11—14.
- [4.15] *Miehlbratt, M.; Wölfel, E.*: CEB/FIP — Mustervorschrift für Tragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton — Internationale Probe- und Vergleichsrechnungen. Beton- und Stahlbetonbau (1980) 6. S. 136—144.
- [4.16] *König, G.; Hasser, D.; Schobbe, W.*: Sicherheitsanforderungen für die Bemessung von haulichen Anlagen nach Empfehlungen des NA Bau — Eine Erläuterung. Der Bauingenieur (1982). S. 69—78.
- [4.17] *König, G.; Hasser, D.*: Praktische Beispiele und Hinweise zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen nach den Empfehlungen des NA Bau. Der Bauingenieur (1982). S. 459—467.
- [4.18] *Ellingwood, B.*: Safety Checking Formats for Limit States Design. Journal of the Structural Div. Vol. 108 (July 1982). S. 1481—1493.
- [4.19] *Buster, E.*: Untersuchungen über den Sicherheitsbegriff von Bauwerken. Schweizer Archiv (1961) 4. S. 133—160.
- [4.20] *Henzog, M.*: Die praktische Berechnung des Sicherheitskoeffizienten für Baukonstruktionen. Schweizerische Bauzeitung (1965) 12. S. 185—187.
- [4.21] *Ester, A.*: Tragberechnung von Stahl- und Spannbetontragwerken. Bauplanung — Bautechnik (1975) 11. S. 475—480, 521—525.
- [4.22] ST RGW 384—85. Zuverlässigkeit von Baukonstruktionen und Gründungen, Grundsätze für die Berechnung. Moskva: Januar 1985, 2. Entwurf.
- [4.23] TGI. 32274 — Lastannahmen für Bauwerke. Dezember, 1976.

- [4.24] TGL 33405/02 — Betonbau, Nachweis der Trag- und Nutzungsfähigkeit, Konstruktionen aus Spannbeton, Oktober, 1980.
- [4.25] *Sachow, U. D.*: Verojatnostnyj metod opredelenija koeficienta sočetańij postojannoj nagruзки c vpemennymi. Stroitel'naja Mech. u. rasč. soor. (1985) 1. S. 3—7.
- [4.26] *Turkstra, C. J.; Madsen, H. O.*: Load Combinations in Codified Structural Design. Journal of the Structural Div. December, 1980. S. 2527—2543.
- [4.27] *Ellingwood, B.; MacGregor, J. G.; Galambos, T. V.; Cornell, C. A.*: Probability Based Load Criteria: Load Factors and Load Combinations. Journal of the Structural Div. (1982) Vol. 108, S. 978—997.
- [4.28] Richtlinie zur Erfassung äußerer Einwirkungen für Spezialbauwerke des Kernkraftwerksbaues. Entwurf März, 1984.
- [4.29] TGL 33403 — Betonbau, Festigkeits- und Formänderungskennwerte, Oktober 1980.
- [5.1] *Potthorst, R.*: Zur Wahl eines einheitlichen Sicherheitskonzepts für den konstruktiven Ingenieurbau. Mitteilungen des Instituts für Massivbau der TH Darmstadt, H. 22 (1977). Verlag W. Ernst & Sohn.
- [5.2] Euro-Code No 1: Common Unified Rules for Different Types of Constructions and Materials. Appendix II: Guidelines for Determining Partial Coefficients, Draft, Februar, 1980.
- [5.3] *Ravindra, Lind*: Theory of Structural Code Optimization. Journal of the Structural Div. (Juli 1983). S. 1541—1553.
- [5.4] *Ellingwood, B.*: Probability-based Criteria for Structural Design. Structural Safety I (1982). S. 15—26.
- [5.5] *Hawranek, R.*: Optimierung von Sicherheitsnachweisen mit besonderem Bezug auf den Tragsicherheitsnachweis von Stützen aus Formstahl. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1978) 34.
- [5.6] *Spaethe, G.*: Sicherheitsfaktoren in Berechnungsvorschriften auf zuverlässigkeitstheoretischer Grundlage. Berlin: Bauinformation, Schriftenreihe: Bauforschung — Baupraxis (1983) 114.
- [5.7] *Lind, N. C.*: Application to Design of Level I Codes. CEB — Bulletin Nr. 112, Part. III. S. 73—89.
- [5.8] *Hawranek, R.; Kraemer, U.*: Determination of Safety Elements for Optimal Design. München: Second International Conference on Structural Safety and Reliability. (September, 1977) Berichtshand. S. 179—197.
- [6.1] *Mrázík, A.*: Statistické zhodnotenie mechanických vlastností konštrukčných ocelí vyrábaných v rokoch 1971 až 1975. Inženýrske Stavby 9 (1977). S. 400—406.
- [6.2] *Galambos, T. V.; Ravindra, M. K.*: Properties of Steel for Use in LRFD. Journal of the Structural Division (1978) 104, ST 9.
- [6.3] *Mirza, S. A.; MacGregor, J. G.*: Variability of Mechanical Properties of Reinforcing Bars. Journal of the Structural Div. (1979). S. 921—937.
- [6.4] *Mirza, S. A.; Hatzinikolas, M.; MacGregor, J. G.*: Statistical Descriptions of Strength of Concrete. Journal of the Structural Div. (June 1979). S. 1021—1037.
- [6.5] *Rüsch, H.*: Der Einfluß der Streuung bei der Betonkontrolle. Der Bauingenieur (1962) 10. S. 373—377.
- [6.6] *Rüsch, H.; Sell, R.; Rackwitz, R.*: Statistische Analyse der Betonfestigkeit. Berlin: Deutscher Ausschuß für Stahlbeton (1969) 206.
- [6.7] *Gerstner, H.*: Zum Nachweis der Betonfestigkeit und der Rohdichteklasse nach TGL 33411/02. Bauplanung — Bautechnik 34 (Nov. 1980) 11. S. 514—520.
- [6.8] *Drigert, K. A.; Gerstner, H.*: Erläuterung zum ETV Beton. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1983.
- [6.9] *Lewicki, B.*: Die Beziehung zwischen der Festigkeit des Betons im Bauwerk, der Rechenfestigkeit und der Probekörperfestigkeit unter Berücksichtigung der Streuung. TU Dresden: Wissenschaftliche Zeitschrift 17 (1968) 6, S. 1497—1507.
- [6.10] *Henzel, J.; Grube, H.*: Festigkeitsuntersuchungen an Bauwerksbeton und zugehörigen Gülewürfeln. Der Bauingenieur (1966) 12. S. 487—491.
- [6.11] *Müller, P.; Keintzel, E.; Chartier, H.*: Dynamische Probleme im Stahlbetonbau. Berlin: Deutscher Ausschuß für Stahlbeton 342 (1983).
- [6.12] *König, G.; Dargel, H.*: A constitutive Law for Reinforced Concrete with Consideration to the Effect of High Strain Rates. Berlin: Symposium Concrete Structures under Impact and Impulsive Loading, BAM 1982.
- [6.13] *Glos, P.*: Zur Bestimmung des Festigkeitsverhaltens von Brettschichtholz bei Druckbeanspruchung aus Werkstoff- und Einwirkungsgrößen. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1978) 35.
- [6.14] *Glos, P.*: Zur Modellierung des Festigkeitsverhaltens von Bauholz bei Druck-, Zug- und Biegebeanspruchung. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1981) 61.
- [6.15] *Spengler, R.*: Festigkeitsverhalten von Brettschichtholz unter zweiachsiger Beanspruchung. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1982) 62.
- [6.16] *Soos, P.*: Zur Ermittlung der Bodenkennwerte mit Berücksichtigung von Streuung und Korrelationen — Vorträge der Baugrundlagung 1982 in Braunschweig; Essen: Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau e. V. S. 83—103.
- [6.17] *Lumb, P.*: Precision and Accuracy of Soil Test — Proceedings of the First International Conference on Application of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering Hong Kong 1971 — Hong Kong: University Press 1972. S. 329—345.
- [6.18] *Schultze, E.*: Etat de l'art, stabilité des pentes et force portante de fondations superficielles. Paris: Symposium «Approche probabiliste de la sécurité pour les études de mécanique des solsstructures» (1979). S. 2.
- [6.19] *Schultze, E.*: Statistik von Bodeneigenschaften und Sicherheit von Bauwerken. Aachen: Forschungsberichte aus Bodenmechanik und Grundbau (FBG) (1983) 8.
- [6.20] TGL 11459 Baugrundmechanik; Formelzeichen.
- [6.21] Joint Committee on Structural Safety. Basic Notes on Actions: Entwurf Oktober, 1976.
- [6.22] Joint Committee on Structural Safety. Basic Notes on Actions: Entwurf April, 1984.
- [6.23] *Maaß, G.; Rackwitz, R.*: Maßabweichungen bei Bauwerken in Ortbeton, Beton- und Stahlbetonbau 75 (1980) 1. S. 9—13.
- [6.24] *Graße, W.; Meitzner, E.; Fizia, T.*: Statistische Kenngrößen der Querschnittswerte von Stahlbauprofilen. VEB Metalleichtbaukombinat — Forschungsinstitut.
- [6.25] *Fichy, M.*: The Science of Structural Actions. Fourth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering 1983. S. 295—321.

- [6.26] *Karman, Th.*: Untersuchungen über die Nutzlast von Decken bei Wohngebäuden. Österreichische Ingenieur-Zeitschrift 9 (1966) 4. S. 119—123.
- [6.27] *Mitchell, G. R.; Woodgate, R. W.*: A Survey of Floor Loadings in Office Buildings. London: Construction Industry Research and Information Association, Report 25, August 1970.
- [6.28] *Mitchell, G. R.; Woodgate, R. W.*: Floor loadings in domestic buildings — the results of a Survey. Watford: Building Research Establishment, Building Research Station Garston, WD 2, 7 JR
- [6.29] *Culver, C.*: Live Load Survey Results for Office Buildings. Journal of the Structural Div. (1976) S. 2269—2284.
- [6.30] *Corotis, R. B.; Tsuy, W. Y.*: Probabilistic Load Duration Model for Live Loads. Journal of Structural Engineering (April 1983) Vol. 109, No 4. S. 859—874.
- [6.31] *Corotis, R. B.; Doshi, V. A.*: Probability Models for Live-Load Survey Results. Journal of the Structural Div. (June 1977) S. 1257—1274.
- [6.32] *Petr, J. C.; Cornell, C. A.*: Spatial and Temporal Variability of Live Loads. Journal of the Structural Div. ASCE (Mai 1973) Vol. 99, S. 903—922.
- [6.33] *Appak, D. A.; Burgman, V. V.; Selju, S. Ju.*: Ocenka nagruzok ot tehnologičeskogo ožorudovanija pri rekonstrukcii mnogoetažnych promyšlennych zdanij. Promyšlennoe Stroitel'stvo SSSR. Nr. 3 (Mart 1979) S. 33—35.
- [6.34] *Appak, D. A.; Burgman, V. V.; Saposnikov, V. Ja.; Selju, S. Ju.*: Točnyj net vrednych nagruzok na perekrytija mnogoetažnych proizvodstvennych zdanij — rezerv ekonomii materialov. Promyšlennoe Stroitel'stvo SSSR (1981) 12. S. 19—21.
- [6.35] *Daniye po tehnologičeskim nagruzkam v jekkoj proumyšlenosti.* Bukarest: RGW-Forschungsbericht, INCERC 1983.
- [6.36] *Ellingwood, B.; Culver, C.*: Analysis of Live Loads in Office Buildings. Journal of the Structural Div. (1977) S. 1551—1560.
- [6.37] *Corotis, R. B.; Jaria, V. A.*: Stochastic Nature of Building Live Loads. Journal of the Structural Div. (1979) S. 493—511.
- [6.38] *Corotis, R. B.; Jaria, V.*: Stochastic Considerations for Office Floor Loads. Tucson: Proceedings of the Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability (1979) S. 65—69.
- [6.39] *König, G.; Marten, K.*: Zum wirklichkeitsnahen Erfassen von Nutzlasten. Bautechnik (1975) 8. S. 275—281.
- [6.40] *Marten, K.*: Zur Festlegung wirklichkeitsnaher Nutzlasten und Laständerungsfaktoren. TH Darmstadt: Dissertation, 1975
- [6.41] *König, G.; Marten, K.*: Nutzlasten in Bürogebäuden. Beton- und Stahlbetonbau (1977) 7. S. 165—170.
- [6.42] *Hasofer, A. M.*: Statistical Model for Live Floor Loads. Journal of the Structural Div. (1968) S. 2183 bis 2198.
- [6.43] *Hasofer, A. M.*: Time-dependent Maximum of Floor Live Loads. Journal of Engineering Mechanics Div. (1974) S. 1086—1091.
- [6.44] *Bickley, D. T.*: Probability Distribution of Maximum Sustained Load. Journal of the Structural Div. ASCE (Nov. 1974) S. 2361—2365.
- [6.45] *Determination of Imposed Floor Loads in Production Buildings and Warehouses.* ISO 2633, First Edition 1974-04-01.
- [6.46] *ISO 4355: Bases for Design of Structures. Determination of Snow Loads on Roofs.*
- [6.47] *TGL 32274/05: Lastannahmen für Bauwerke — Schneelasten.* Dezember, 1976.
- [6.48] *Die meteorologischen Grundlagen der potentiellen Schneelastgefährdung im Gebiet der DDR.* Hauptamt für Klimatologie, Forschungsbericht, 1972.
- [6.49] *Extremwerte einiger volkswirtschaftlich wichtiger meteorologischer Größen.* Potsdam: Meteorologischer Dienst der DDR, Hauptamt für Klimatologie, Oktober, 1982.
- [6.50] *O'Rourke, M. I.; Redfield, R.; v. Bradsky, P.*: Uniform Snow Loads on Structures. Journal of the Structural Div., ASCE, Vol. 108 (Dez. 1982) S. 2781—2798.
- [6.51] *O'Rourke, M. I.; Stiefel, W.*: Roof Snow Loads for Structural Design. Journal of Structural Engineering. Vol. 109, No 7 (July 1983) S. 1527—1537.
- [6.52] *Davenport, A. G.*: The Spectrum of Horizontal Gustiness near the Ground in High Winds. Quart. J. R. Met. Soc. Vol. 87 (1961) S. 194—211.
- [6.53] *Davenport, A. G.*: The Application of Statistical Concepts to the Wind Loading of Structures. Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Vol. 19 (1961) S. 443—471.
- [6.54] *TGL 32274/07 — Lastannahmen für Bauwerke, Windlasten.* Dezember, 1976.
- [6.55] *Richtlinie für die Berechnung und bauliche Durchbildung hoher schlanker Tragwerke unter widerregten Querschwingungen.* Rundfunk- und Fernsichttechnisches Zentralamt der Deutschen Post, März, 1982.
- [6.56] *Klimadaten der Deutschen Demokratischen Republik. Ein Handbuch für die Praxis Reihe B, Band 4, Wind.* Potsdam: Meteorologischer Dienst der DDR 1983.
- [6.57] *Trätner, A.*: Windwirkung auf schwingungsgefährdete Bauwerke. Bauforschung — Baupraxis (1980) 48.
- [6.58] *Casper, W.*: Maximale Windgeschwindigkeiten in der Bundesrepublik Deutschland. Die Bautechnik (1970) 10. S. 335—339.
- [6.59] *Siedenburg, R.*: Beitrag zur Beurteilung von Windlasten und ihrer Häufigkeit. Der Stahlbau (1974) 12. S. 375—379.
- [6.60] *König, G.; Zilch, K.*: Ein Beitrag zur Berechnung von Bauwerken im böigen Wind. TH Darmstadt: Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt (1970) 15. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.
- [6.61] *König, G.; Zilch, K.*: Zur Windeinwirkung auf Gebäude. Beton- und Stahlbetonbau (1972) 2. S. 32—42.
- [6.62] *Ravindra, M. K.; Cornell, C. A.; Galambos, T. V.*: Wind and Snow Load Factors for Use in LRFD. Journal of the Structural Div. (September 1978) S. 1443—1457.
- [6.63] *Krämer, W.*: Ermittlung von Lastkollektiven des Straßenverkehrs durch eine transportable Achslastwaage. Die Straße (1971) 12. S. 537—542.
- [6.64] *Pohl, S.*: Straßenverkehrsdaten als Grundlage für Beanspruchungskollektive von Straßenbrücken. Die Straße (1977) 4. S. 150—154.
- [6.65] *Krämer, W.; Pohl, S.*: Der Ermüdungsnachweis in dem Standard TGL 13460/01, Ausgabe 1984 — Grundlagen und Erläuterungen. Die Straße (1984) 9. S. 257—263.
- [6.66] *Geidner, T.*: Zur Untersuchung stationärer Lastwirkungsprozesse von statisch reagierenden Straßen- und Eisenbahnbrücken mit der Spektralmethode. TU München: Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke (1977) 19.

[6.67]	<i>Goldner, T.</i> : Zur Anwendung der Spektralmethode auf Lasten und Beanspruchungen bei Straßen- und Eisenbahnbrücken. TU München: Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke (1979) 37.	
[6.68]	<i>Stavik, M.</i> : Beitrag zur wirklichkeitsnahen Analyse der dynamischen Beanspruchung von Straßenbrücken. Die Straße (1983) 6. S. 165—168, 7. S. 210—214.	
[6.69]	<i>Spaethe, G.</i> : Beanspruchungskollektive von Straßenbrücken. Die Straße (1977) 6. S. 241—246.	
[6.70]	<i>Spaethe, G.</i> : Erweiterung und Verbesserung des Simulationsmodells zur Berechnung von Beanspruchungskollektiven von Straßenbrücken als Grundlage für die Anwendung im Betriebsfestigkeitsnachweis. Forschungsbericht, VEB Entwurfs- und Ingenieurbüro des Straßenwesens.	
[6.71]	<i>Wiedmann, R.</i> : Simulation des Verkehrslusses. Schriftenreihe des Institutes für Verkehrswesen der Universität Karlsruhe (1974) 8.	

## О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие	3
<b>1. Введение</b>	<b>5</b>
1.1. Резерв прочности между нагрузкой и несущей способностью	6
1.2. Меры по исключению ошибок человека	8
1.3. Меры по ограничению размера ущерба	10
1.4. Традиционный эмпирический расчет безопасности	11
1.5. Современная теоретическая оценка безопасности — обзор методов	15
<b>2. Математическое моделирование случайных свойств конструкций и нагрузок на них</b>	<b>17</b>
2.1. Основные положения	17
2.2. Случайные события	19
2.3. Случайные величины	21
<b>1. Одномерные случайные величины</b>	<b>21</b>
Функция распределения и его плотность	21
Моменты	24
Некоторые практически важные распределения	26
Распределения, параметры которых — случайные величины	36
Трансформированные распределения	37
<b>2. Многомерные случайные величины</b>	<b>38</b>
<b>3. Последовательности независимых случайных величин</b>	<b>41</b>
<b>2.4. Стохастические процессы</b>	<b>45</b>
1. Основные положения	45
2. Функция распределения и плотность распределения	45
3. Моменты случайных функций	46
4. Выброс процесса за заданный уровень	48

5. Непрерывные дифференцируемые стохастические процессы	50
6. Процессы обновления	52
7. Импульсные процессы	54
Двухпараметрические процессы	54
Трёхпараметрические процессы	59
Прерывные континуальные процессы	61
<b>8. Теория надежности несущих строительных конструкций</b>	<b>63</b>
<b>3.1. Основные положения и понятия</b>	<b>63</b>
1. Вероятность отказа и вероятность безотказной работы	63
2. К определению вероятности отказа	63
3. Оперативная вероятность отказа	65
4. Зависимость вероятности отказа от времени	66
5. Срок существования и срок службы сооружения	68
<b>6. Плотность отказов</b>	<b>70</b>
7. Предельное состояние как функция базисных переменных	71
<b>3.2. Определение вероятности отказа</b>	<b>76</b>
1. Обзор	76
2. Отказ по одному предельному состоянию	78
Все базисные переменные — случайные величины	78
Одна базисная переменная, зависящая от времени	144
Многие базисные переменные, зависящие от времени	151
3. Отказ систем с многими предельными состояниями	175
Основные положения	175
Частные случаи	181
Оценки общего случая последовательных систем	184
<b>3.3. Проектирование на основе теории надежности</b>	<b>194</b>
<b>3.4. Назначение требуемого уровня безопасности</b>	<b>198</b>
1. Расчет по существующим нормам	199
2. Сравнение частот отказов с частотами несчастных случаев и смертей	199
3. Рассмотрение риска	200
4. Экономически оптимальная вероятность отказа	201
<b>5. Предварительные предложения к назначению требуемого уровня безопасности</b>	<b>203</b>
<b>4. Практические модели безопасности</b>	<b>205</b>
4.1. Общие положения	205
4.2. Нормативные значения	205
4.3. Общий коэффициент запаса и допускаемое напряжение	208
<b>4.4. Частные коэффициенты надежности</b>	<b>211</b>
1. Частные коэффициенты в методе предельных нагрузок	211
2. Частные коэффициенты в методе предельных состояний	212
Основные положения	212
Коэффициент надежности по назначению	215
Коэффициент надежности по нагрузке	217
Правило сочетаний нагрузок и коэффициент сочетаний	218
Коэффициент надежности по материалу	224
Коэффициент условий работы	225

Стр.



	Стр.
<b>5. Приложение теории надежности к нормированию</b>	226
5.1. Общие положения	226
5.2. Общий коэффициент запаса	227
5.3. Определение частных коэффициентов надежности с использованием проектной точки	230
5.4. Общие методы оптимизации	234
<b>6. Статистические данные</b>	241
6.1. Основные положения	241
6.2. Свойства материалов	241
1. Сталь	241
2. Бетон	243
3. Древесина	245
4. Грунты	247
6.3. Нагрузки	248
1. Собственный вес	248
2. Поэтажные нагрузки в аданиях	250
3. Снеговые нагрузки	252
4. Ветровые нагрузки	256
<i>Приложение I. Используемые обозначения</i>	260
<i>Приложение II. Формулы для некоторых функций распределения</i>	262
<i>Приложение III. Программа на Бейсике</i>	274
Список литературы	275

*Научное издание*

Шпете Герхард

**НАДЕЖНОСТЬ НЕСУЩИХ  
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Редактор Г. А. Лебедева

Технический редактор Е. Л. Темкина

Корректор Н. С. Сафронова

ИБ 5483

*Лицензия № 020441 от 28.02.92*

---

Сдано в набор 14.06.93      Формат 60×90<sup>1/16</sup>      Подписано в печать 9.03.94  
 Бумага офсетная    Усл. печ. л. 18    Усл. кр.-отт. 18,25    Уч.-изд. л. 18,34    Заказ 72  
 Тираж 1000 экз.    Гарнитура «Литературная»    Печать высокая    Изд. № АВИ11-4093С.

---

Стройиздат, 101442 Москва, Долгоруковская, 23а  
 Ф.ка «Картонитография», ул. Зорге, 15